

# IL NUOVO CIMENTO

ORGANO DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA  
SOTTO GLI AUSPICI DEL CONSIGLIO NAZIONALE DELLE RICERCHE

VOL. VIII, N. 6

Serie nona

1 Giugno 1951

## La costante dielettrica dei gas nella regione delle microonde.

A. GOZZINI

*Istituto di Fisica dell'Università - Pisa*

(ricevuto il 15 Gennaio 1951)

**Riassunto.** — Nel presente lavoro si descrive un nuovo metodo per la determinazione della costante dielettrica dei gas nella regione delle microonde, e si danno i risultati delle misure eseguite su Idrogeno, aria ed Anidride carbonica alla lunghezza d'onda di 3,4 cm.

1. — La misura della costante dielettrica dei gas, nella regione delle microonde è stata oggetto, negli ultimi anni, di varie ricerche.

Il primo, e più importante lavoro sull'argomento è dovuto a HERSHBERGER <sup>(1)</sup>, il quale ha determinato la costante dielettrica ed il coefficiente di assorbimento di 15 gas, alle lunghezze d'onda di 1,25 e 3,2 cm.

Il metodo seguito da HERSHBERGER per la determinazione di  $\epsilon$  consiste nella misura dello spostamento della posizione dei nodi di un sistema di onde stazionarie, in una guida cortocircuitata, quando la guida, vuota, viene riempita del gas studiato.

A detta dello stesso autore, il metodo non consente la determinazione di costanti dielettriche molto piccole, ed è stato impiegato su composti a costante dielettrica diversa da uno per qualche unità sulla terza cifra decimale.

Più recentemente CRAIN <sup>(2)</sup>, misurando la variazione della frequenza di

<sup>(1)</sup> W. D. HERSHBERGER: *Journ. Appl. Phys.*, **17**, 495 (1946); W. D. HERSHBERGER e J. E. WIELTER: *Journ. Appl. Phys.*, **17**, 814 (1946).

<sup>(2)</sup> C. M. CRAIN: *Phys. Rev.*, **74**, 691 (1948).

battimento fra due oscillatori stabilizzati, secondo il metodo di Pound, da due cavità risonanti, quando una delle cavità viene riempita dal gas, ha determinato, alla lunghezza d'onda di 3,2 cm, la costante dielettrica dell'aria e dell'O<sub>2</sub>, oltre a quella di diversi composti organici.

H. LLYONS, G. BIRNBAUM, J. KRYDER <sup>(3)</sup>, sempre misurando la variazione della frequenza di risonanza di una cavità, quando venga riempita dal gas, hanno determinato  $\epsilon$  per l'He, CO<sub>2</sub>, N<sub>2</sub>, O<sub>2</sub>, ed aria. Il metodo da noi seguito permette le misure con precisione dello stesso ordine di grandezza dei metodi basati sul confronto di cavità risonanti, pur avendo su questi notevoli vantaggi per la semplicità dell'apparecchiatura.

Si è misurata la costante dielettrica dell'aria, CO<sub>2</sub>, ed H<sub>2</sub> ed i valori trovati sono in buon accordo con quelli del CRAIN per l'aria e di LLYONS per CO<sub>2</sub>. Per l'Idrogeno non ci risulta sia ancora stata determinata la costante dielettrica, nella regione delle microonde. Essa è risultata  $1,000274 \pm 0,000002$ , a pressione atmosferica e a 15 °C.

2. - Se si considera un generatore di frequenza  $\nu$  che alimenta un carico attraverso una linea di trasmissione costituita da una cavità risonante, è facile dimostrare <sup>(4)</sup>, nell'ipotesi che sia trascurabile il coefficiente di mutua induzione fra i sistemi di accoppiamento della cavità, rispettivamente al generatore ed al carico, e nell'ipotesi che la frequenza del generatore sia prossima a quella di risonanza della cavità, che, se  $P_c$  è la potenza ricevuta al carico, e  $P_G$  quella erogata dal generatore, è:

$$\frac{P_c}{P_G} = T(\nu) = \frac{T(\nu_0)}{1 + \bar{Q}^2 \left( \frac{\nu}{\nu_0} - \frac{\nu_0}{\nu} \right)^2}; \quad T(\nu_0) = \frac{4\beta_1\beta_2}{(1 + \beta_1 + \beta_2)^2},$$

ove  $\nu_0$  è la frequenza di risonanza della cavità,  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sono due coefficienti, detti parametri di accoppiamento, dipendenti dalle impedenze del generatore, del carico, d'ingresso e di uscita della cavità, cioè dai sistemi di accoppiamento della cavità al generatore ed al carico, e  $\bar{Q}$ , coefficiente di sovratensione della cavità caricata, è legato al coefficiente di sovratensione  $Q$  della cavità:

$$Q = \bar{Q}(1 + \beta_1 + \beta_2).$$

Ne segue che, se il  $Q$  della cavità è elevato, ed i parametri  $\beta_1$  e  $\beta_2$  non sono molto grandi, la potenza trasmessa alle frequenze diverse da quelle di risonanza è molto inferiore a quella trasmessa alle frequenze di risonanza (nell'ipotesi

<sup>(3)</sup> H. LLYONS, G. BIRNBAUM e J. KRYDER: *Phys. Rev.*, **74**, 1210 (1948).

<sup>(4)</sup> C. G. MONTGOMERY: *Technique of Microwave measurements* (New-York, 1947), pag. 289.



che il generatore eroghi la stessa potenza in una stretta banda di frequenze) ed il sistema può funzionare da filtro.

3. - L'apparecchiatura usata consiste in un oscillatore sui 9 000 MHz, costituito da un Klystron reflex 723A/B, da una guida d'onda rettangolare e da un ricevitore. La guida è terminata da due antenne a tromba, ed è chiusa alle estremità da due finestre di vetro. Essa è posta nell'interno di un tubo, ed è in comunicazione con questo. Il tubo è connesso ad una pompa ed alla

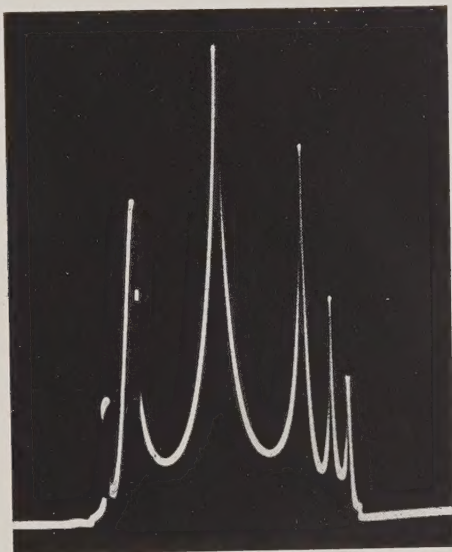


Fig. 1. - Potenza ricevuta in funzione della lunghezza d'onda. La scala delle  $\lambda$  è pressochè lineare solo nella zona centrale della curva.  $\lambda$  è crescente da sinistra a destra. Le sei risonanze corrispondono ai valori 163, 162, ..., 158 dell'indice  $n$ . Il segnale visibile sul ramo destro della seconda risonanza è causato dall'ondametro.

sorgente del gas, così che la guida può essere vuotata senza che si deformi per differenza di pressione con l'esterno. Le finestre sono state scelte in modo da presentare notevole coefficiente di riflessione per le frequenze interessate.

In tali condizioni la guida costituisce una cavità risonante parallelepipedica, che viene eccitata dal generatore con onde  $TE_{01}$ . Per le lunghezze d'onda (nel vuoto)  $\lambda_n$  tali che:

$$(1) \quad \frac{\lambda_n}{2 \sqrt{\varepsilon - \left(\frac{\lambda_n}{2a}\right)^2}} = \frac{l}{n}$$

(ove  $\epsilon$  è la costante dielettrica del mezzo che riempie la guida,  $a$  è la dimensione maggiore della sezione retta della guida,  $l$  è la sua lunghezza e  $n$  è un numero intero), la guida risuona. Nella guida usata è  $a = 2,3$  cm,  $l = 450$  cm.

L'oscillatore è modulato in frequenza e la lunghezza della guida è tale che, nell'intervallo di frequenze entro il quale oscilla il Klystron, cadono sei di tali  $\lambda_n$ , corrispondenti ai valori  $n = 158, 159, \dots, 163$ .

Il sistema è analogo a quello sopra considerato e, come abbiamo già detto, la guida agisce da filtro passa banda, che lascia passare strette bande intorno alle varie  $\lambda_n$ .

I parametri  $\beta_1$  e  $\beta_2$  ed il  $Q$  della cavità dipendono dal materiale e dallo spessore delle finestre, che sono state scelte per tentativi in modo da produrre risonanze piuttosto acute.

In fig. 1 è riportato un oscillogramma del « modo » del Klystron, cioè della curva potenza-lunghezza d'onda, ricevuto dopo la guida. In assenza della guida, o con la guida resa aperiodica, tale curva avrebbe avuto un andamento a campana.

Il ricevitore è costituito da un diodo al silicio 1N21, seguito da amplificatore a larga banda e da un oscillografo a raggi catodici.

La tensione di modulazione del repeller del Klystron è prelevata dalla tensione dell'asse dei tempi dell'oscillografo.

Nell'oscillatore è incorporato un ondometro ad assorbimento, che preleva una piccola frazione dell'energia, alla frequenza su cui è accordato. Con tali

ondometri la lunghezza d'onda viene determinata regolando l'ondometro sino a che non si nota un minimo dell'energia ricevuta, e leggendo  $\lambda$  direttamente sull'ondometro. Questo nel caso che si operi a frequenza costante. Nel nostro caso, alla frequenza su cui è accordato l'ondometro si osserva sull'oscillografo un

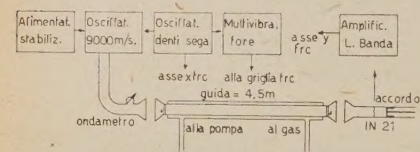


Fig. 2.

minimo relativo nella curva potenza-frequenza. Si noti che in fig. 1, che rappresenta appunto tale curva, la scala delle frequenze è lineare solo nella parte centrale. Se l'assorbimento causato dall'ondometro cade in un tratto di ripida pendenza della curva, esso appare come un flesso.

In fig. 2 è rappresentato lo schema dell'apparato.

Quando la tensione a denti di sega applicata al repeller del Klystron ha ampiezza sufficiente a modulare il tubo su di un suo intero modo, all'oscillografo appare il segnale di fig. 1. Se cambia la costante dielettrica del mezzo che riempie la guida, cambiano le  $\lambda_n$  che soddisfano la (1), e le risonanze si spostano, per esempio verso le  $\lambda$  crescenti, se  $\epsilon$  aumenta.

Per rivelare tali spostamenti, si regola la tensione base e l'ampiezza della



tensione di modulazione del repeller del Klystron in modo da far comparire sull'oscillografo una sola risonanza, si produce il vuoto nella guida e si regola l'ondametro in modo da far comparire un flesso sul tratto di forte pendenza della curva di risonanza.

Se si immette il gas nella guida, la posizione del flesso sulla curva cambia.

Le figg. 3 e 4 mostrano l'effetto prodotto dal gas; in fig. 3 sono cinque oscillo-

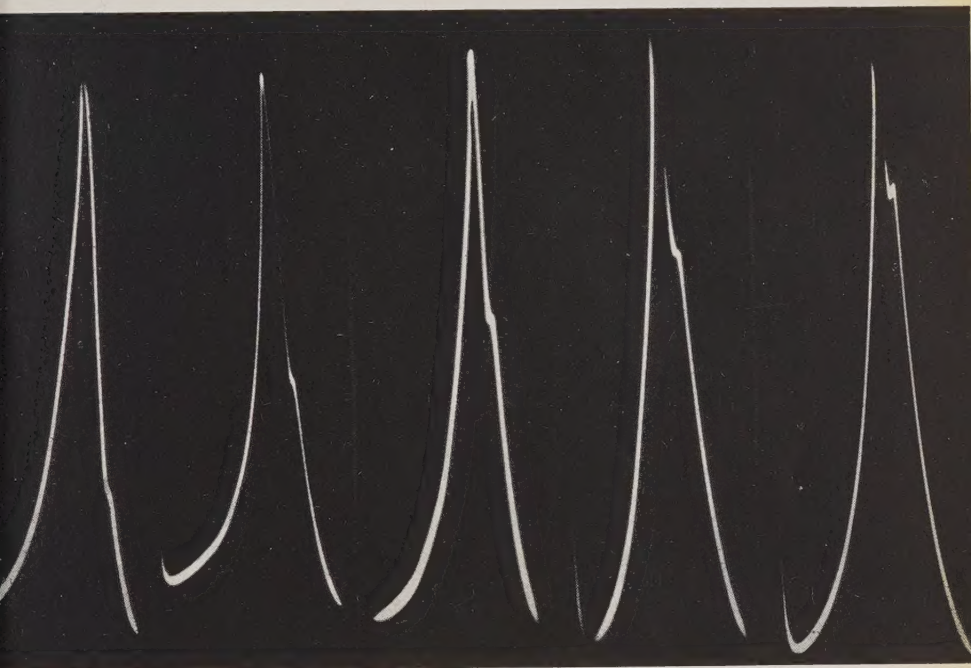


Fig. 3. — Gli oscillogrammi sono stati presi con la guida piena d'aria alle pressioni (cm di mercurio): (a)  $< 0,1$ ; (b) 20; (c) 40; (d) 60; (e) 75.

grammi presi con la guida piena d'aria a diverse pressioni, in fig. 4 sono quattro oscillogrammi presi con la guida vuota e piena rispettivamente di  $H_2$ , aria e  $CO_2$ , tutti a pressione atmosferica.

Misure quantitative molto rapide possono eseguirsi ponendo l'ondametro in una posizione ben determinata della curva di risonanza, per esempio sul massimo, con la guida vuota, ed immettendo il gas nella guida fino alla pressione voluta. Si riporta l'ondametro sul massimo e si legge la nuova lunghezza d'onda di risonanza. Dalla differenza delle due lunghezze d'onda di risonanza si deduce subito la costante dielettrica. Il metodo è vincolato al potere riso-

lutivo dell'ondametro, e non consente la determinazione di  $\epsilon$  con una precisione superiore alla quarta decimale, cioè, nel caso dei gas esaminati, oltre la prima cifra significativa.

Misure più accurate si eseguono interrompendo con un multivibratore, sincronizzato con la tensione asse dei tempi, il tubo r.c., in modo da avere l'oscillogramma costituito da una punteggiata, anzichè da una linea continua,



Fig. 4. — Oscillogrammi presi con la guida vuota (a), e piena di  $H_2$  (b); aria (c);  $CO_2$  (d), a pressione atmosferica.

e contando il numero dei punti compresi fra due  $\lambda$  determinate con l'ondametro. Se l'intervallo fra le due lunghezze d'onda è scelto nella regione centrale del modo, nella quale la lunghezza varia con legge lineare con la tensione del repeller, l'intervallo  $\Delta\lambda$  individuato da due punti successivi si deduce subito dividendo la differenza fra le due lunghezze d'onda per il numero dei punti compresi.

La costante dielettrica del gas allora si determina regolando l'ondametro in modo da far cadere il flessio, quando la guida è vuota, nella regione di forte

pendenza della curva di risonanza, facendo entrare il gas e contando il numero dei punti di cui si è spostata la traccia dell'ondametro.

Infatti, se  $s$  è il numero di tali punti e  $\lambda_0$  è la lunghezza d'onda su cui è accordato l'ondametro, la posizione occupata, quando la guida è vuota, dal flesso, che corrisponde a  $\lambda_0$ , corrisponde invece, quando la guida è piena di gas, alla lunghezza d'onda:  $\lambda = \lambda_0 + s\Delta\lambda$  (2). D'altra parte, nell'ipotesi che, per l'immissione del gas, la curva di risonanza si sposti rigidamente, senza deformarsi (ipotesi lecita, data la piccola entità dello spostamento e il basso coefficiente di assorbimento dei gas studiati), si ha subito dalla (1):

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{\varepsilon},$$

e, dalla (2):

$$\lambda - \lambda_0 = s\Delta\lambda = \lambda_0(\sqrt{\varepsilon} - 1); \quad s \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{\varepsilon - 1}{2}.$$

4. - L'Idrogeno e l'Anidride carbonica usati erano del tipo commerciale, e sono stati immessi nella guida direttamente dalla bombola; l'aria è stata preventivamente essiccata facendola passare attraverso diversi tubi contenenti  $\text{CaCl}_2$  e  $\text{P}_2\text{O}_5$ .

Per ottenere una grande sensibilità le misure sono state eseguite interrompendo periodicamente il fascio elettronico del tubo r.c. con frequenza notevolmente alta rispetto a quella dell'asse dei tempi, ed amplificando notevolmente il segnale. La traccia sull'oscillografo diventa allora una punteggiata, ma nel nostro caso i punti sono risolti solo nei tratti di forte pendenza della curva di risonanza, e non risultano risolti nell'intorno del massimo e del flesso causato dall'ondametro. Il numero dei punti di cui si è spostato il flesso si ricava per differenza dal numero dei punti risolti compresi fra il massimo ed il flesso prima e dopo l'immissione del gas. Le misure sono state eseguite in diverse riprese; in ciascuna ripresa si è fatta una prima fotografia dello schermo dell'oscillografo e si è contato il numero  $s_1$  dei punti risolti compresi fra il massimo ed il flesso; si è poi variata la pressione del gas (di circa 10 cm di mercurio nelle misure con  $\text{CO}_2$ , maggiormente per gli altri gas), e si è di nuovo fotografato lo schermo e contato il numero  $s_2$  dei punti risolti, compresi ancora fra il massimo ed il flesso. Quindi, agendo sull'ondametro, si è riportato il flesso approssimativamente nella posizione iniziale. Si è ripetuta diverse volte l'operazione, sino a raggiungere la pressione atmosferica. La somma delle differenze  $s_1 - s_2$  dà infine il valore di  $s$ . In tale maniera possono apprezzarsi variazioni di  $\varepsilon$  dell'ordine di due unità della sesta cifra decimale.

Maggiore sensibilità può attendersi aumentando la lunghezza della guida. I valori seguenti sono, ciascuno, la media di dieci misure, tutte eseguite alla temperatura ambiente; la differenza fra il numero dei punti nelle diverse mi-



sure è stata al massimo di una unità, il che comporta un errore massimo nella determinazione di  $\epsilon$  di  $1,7 \cdot 10^{-6}$ .

Gas	Pressione (cm di Hg)	$(\epsilon - 1) \cdot 10^6$
H <sub>2</sub>	40	150 $\pm$ 2
»	75	274 $\pm$ 2
Aria	20	158 $\pm$ 3
»	35	270 $\pm$ 2
»	48	365 $\pm$ 3
»	60	455 $\pm$ 3
»	75	571 $\pm$ 3
CO <sub>2</sub>	20	250 $\pm$ 2
»	30	382 $\pm$ 3
»	42	540 $\pm$ 3
»	50	620 $\pm$ 3
»	62	796 $\pm$ 4
»	75	976 $\pm$ 4

È mio gradito dovere ringraziare il prof. NELLO CARRARA per l'interesse mostrato per il presente lavoro, per i consigli ed i suggerimenti, e per il materiale del Centro di studi per la Fisica delle microonde, gentilmente prestato.

#### SUMMARY

A new method for measuring dielectric constant of gases, in the microwave region, is described, utilizing spurious reflections in mismatched waveguides. Results are given for H<sub>2</sub>, air and CO<sub>2</sub>.



## Über das Schrödingersche Zittern der de Broglieschen Teilchen mit dem Spin 1 vom Typus des Mesons.

V. S. VRKLJAN

Zagreb

(ricevuto il 20 Marzo 1951)

**Zusammenfassung.** — Sowohl auf Grund einer schon erschienenen Abhandlung als auch auf Grund der Berechnungen, die der Verfasser durchgeführt hat, wird hier (nur unter Andeutung dieser Berechnungen) gezeigt, wie man sich bei der Ableitung des Schrödingerschen Zitterns der de Broglieschen Teilchen mit dem Spin 1 (vom Typus des Mesons) der Diracschen Gleichungen (statt der de Broglieschen) bedienen kann. Im zweiten Teil dieser Abhandlung wird dann (ebenso nur unter Andeutung der Berechnungen) gezeigt, wie mittels der neueren de Broglieschen Theorie der Teilchen mit dem Spin 1 (vom Typus des Mesons) das Schrödingersche Zittern solcher Teilchen abgeleitet werden kann.

1. — In einer vorhergehenden Abhandlung <sup>(1)</sup> hat der Verfasser dieser Zeilen gezeigt, daß den de Broglieschen Teilchen mit dem Spin 1 vom Typus des Mesons das sog. Schrödingersche Zittern <sup>(2)</sup> zuzuschreiben ist. Dies bedeutet, daß der statistische Schwerpunkt solcher Teilchen (beim Nicht-Vorhandensein des elektromagnetischen Feldes) einer Serie von Oszillationen unterworfen ist, obwohl wir sonst nach dem Theorem von P. EHRENFEST <sup>(3)</sup> der Schrödingerschen Wellenmechanik eine geradlinige und gleichförmige Bewegung erwarten würden.

Die Ableitung wird in der erwähnten Abhandlung so durchgeführt, daß man zuerst die erste und dann die andere Gruppe der de Broglieschen Wellengleichungen anwendet; dies geschieht sowohl bei der Abänderung des Aus-

<sup>(1)</sup> *Anzeiger d. Österr. Akademie*, **10**, 253-261 (1950).

<sup>(2)</sup> E. SCHRÖDINGER: *Annales de l'Institut H. Poincaré*, **2**, 269-310 (1932), besonders die S. 274.

<sup>(3)</sup> P. EHRENFEST: *Zeits. f. Phys.*, **45**, 455-457 (1927); Vgl. Auch: A. E. RUARK: *Phys. Rev.*, **31**, 536-538 (1928).

druckes für  $d\bar{x}/dt$  als auch bei der Veränderung des Ausdruckes für die statistische Teilchendichte. Die stufenartige Anwendung der de Broglieschen Wellengleichungen in der erwähnten Abhandlung bedeutet (mathematisch genommen) die stufenartige Zurückführung der abhängigen auf unabhängige (d.h. beliebig wählbare) de Brogliesche Planwellengrößen  $B_{kl}$ .

Die Frage, die sich der Verfasser im ersten Teile dieses Artikels aufgestellt hat, besteht darin, ob es nicht möglich wäre, statt der de Broglieschen die Diracschen Wellengleichungen anzuwenden. Dies bedeutet zugleich eine unmittelbare Zurückführung der abhängigen auf unabhängige (d.h. beliebig wählbare) Größen  $B_{kl}$  der Planwellen, also nicht stufenweise, wie das mittels der de Broglieschen Wellengleichungen durchgeführt wurde. Es bedeutet dies also eine Frage, ob die erwähnte (d.h. stufenartige) Ableitung notwendig oder nur hinreichend ist.

Als Diracsche Wellengleichungen der Partikeln, welche zusammen durch Fusion das de Brogliesche Teilchen mit dem Spin 1 ergeben, wählen wir diejenigen, welche vom Verfasser dieses Artikels schon a. a. O. <sup>(4)</sup> aufgeschrieben wurden. Dann ist, wie bekannt<sup>(5)</sup>, das komplette System der monochromatischen Planwellen für die erste Diracsche Partikel mittels der Gleichung

$$(1) \quad \Psi'_k = \int \int \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ B'_k(p_x, p_y, p_z) \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z - Ut) \right] + C'_k(p_x, p_y, p_z) \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z + Ut) \right] \right\} dp_x dp_y dp_z,$$

gegeben. Eine analoge Gleichung gilt für die zweite Partikel, wir denken nur die entsprechenden Größen  $\Psi''_k$ ,  $B''_k$  und  $C''_k$  mit einem Zweistrich bezeichnet. Hier beziehen sich die Komponenten  $p_x$ ,  $p_y$ ,  $p_z$  des Impulses und die Energie  $U$  auf das ganze durch Fusion erhaltene Teilchen, davon der Faktor  $1/2$  im Exponent für jede Diracsche Partikel. Das ist der Unterschied gegenüber denjenigen Deduktionen in einer vorhergehenden schon erwähnten Abhandlung <sup>(6)</sup>, wo sich  $p$  und  $U$  auf die Hälfte des durch Fusion erhaltenen Teilchens beziehen.

Wir denken nun aus der ersten Gruppe der Diracschen Wellengleichungen, welche unter (3a) in der eben erwähnten vorhergehenden Abhandlung angeführt ist, die Größen  $B'_k$  ( $k=1,2$ ) mittels der Anwendung der Planwellen

$$\Psi'_k = B'_k \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z - Ut) \right],$$

<sup>(4)</sup> *Proceedings of the Indian Academy of Sciences*, **30**, 205-206 (1949).

<sup>(5)</sup> L. DE BROGLIE: *L'Électron magnétique* (1934), S. 285.

<sup>(6)</sup> Siehe <sup>(4)</sup>.



berechnet. Wir wählen dabei die Größen  $B'_k$  ( $k = 3, 4$ ) als beliebige Größen. Man erhält dann mittels der Anwendung der Planwellen

$$\Psi'_k = C'_k \exp \left[ \frac{1}{2} \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z + U t) \right]$$

die Größen  $C'_k$  ( $k = 3, 4$ ) berechnet, die Größen  $C'_k$  ( $k = 1, 2$ ) dabei beliebig gewählt gedacht.

Ebenso denken wir aus der zweiten Gruppe der Diracschen Wellengleichungen, welche unter (3b) in der eben erwähnten Abhandlung (7) angeführt sind, die Größen  $B''_k$  ( $k = 1, 2$ ) berechnet neben  $B''_k$  ( $k = 3, 4$ ) als beliebig gewählte Größen, und ebenso  $C''_k$  ( $k = 3, 4$ ) berechnet neben  $C''_k$  ( $k = 1, 2$ ) als beliebig gewählte Größen.

Wenn wir die so berechneten Größen  $B_k$  und  $C_k$  auf die Gleichung (4) meiner von Anfang erwähnten Abhandlung anwenden und dabei beachten, daß die dortigen Ausdrücke  $B_{kl} = B'_k B'_l$ ,  $C_{kl} = C'_k C'_l$  sind, so würden wir mit Rücksicht auf die statistische Teilchendichte (des durch Fusion erhaltenen Teilchens) zu den gleichen Endresultaten wie in meiner anfangs zitierten Abhandlung gelangen.

2. – Wir wenden uns nun zu der Frage, ob auch in der neueren de Broglieschen Theorie der Teilchen mit dem Spin 1, welche durch die nicht ganz usuelle kanonische Form der Wellengleichungen charakterisiert ist (8) eine nicht stufenartige Zurückführung auf beliebig wählbare Planwellengrößen eventuell möglich wäre. Man kann leicht ersehen, daß dies möglich ist.

Als Diracsche Matrizen, auf welche wir die Methode der Fusion anwenden werden, wählen wir (9)

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g^* \\ g^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \alpha_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & g \\ 0 & 0 & -g^* & 0 \\ 0 & -g & 0 & 0 \\ g^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \end{array} \right. \quad \alpha_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & -ig \\ 0 & 0 & -ig^* & 0 \\ 0 & ig & 0 & 0 \\ ig^* & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \alpha_4 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

(7) Siehe (4).

(8) L. DE BROGLIE: *Mécanique ondul. du Photon* (1928), S. 82.

(9) Angeführt in einer Abhandlung, welche von der Jugosl. Akademie angenommen ist.

wo  $g$  eine beliebige (komplexe) und  $g^*$  die zu ihr konjugiert-komplexe Zahl bedeutet.

Wir denken nun die de Broglieschen quadratischen hermiteschen Matrizen 16. Ordnung [gemäß den Definitionen  $(a_r)_{kl,mn} = (\alpha_r)_{km}\delta_{ln}$ ,  $(b_r)_{kl,mn} = (\alpha_r)_{ln}\delta_{km}$  ( $r, k, l, m, n = 1, 2, 3, 4$ )] aufgeschrieben und ebenso die dazu gehörigen Wellengleichungen der neueren de Broglieschen Theorie

$$(3a) \quad \left\{ \frac{\hbar}{i} \sum_{r=1}^3 \frac{a_r b_4 + b_r a_4}{2} \frac{\partial}{\partial x_r} + a_4 b_4 \mu_0 c + \frac{\hbar}{ic} \frac{a_4 + b_4}{2} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi_{kl} = 0,$$

$$(3b) \quad \left\{ \sum_{r=1}^3 \frac{b_r a_4 - a_r b_4}{2} \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{a_4 - b_4}{2} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right\} \Psi_{kl} = 0.$$

Berechnen wir auf Grund der Gleichungen (3a) und (3b) unter Anwendung der Planwellen

$$\Psi_{kl} = B_{kl} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z - Ut) \right]$$

diejenigen Größen  $B_{kl}$ , die nicht als beliebig wählbar zu betrachten sind [wir wählen die Größen  $B_{kl}$  ( $k, l = 3, 4$ ) als beliebig] und führen diese so berechneten (d.h. mittels der unabhängigen ausgedrückten) Größen in den Ausdruck

$$(4) \quad \frac{d\omega}{dt} = c \sum_z \chi \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 \left\{ \left[ B_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} B_{kl} + C_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} C_{kl} \right] + \right. \\ \left. + \left[ B_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} C_{kl} \exp \left[ 2 \frac{i}{\hbar} Ut \right] + C_{kl}^* \frac{a_1 b_4 + b_1 a_4}{2} B_{kl} \exp \left[ -2 \frac{i}{\hbar} Ut \right] \right\},$$

ein, dann gelangen wir nach Berechnungen, die hier der Kürze halber ausbleiben können, zu demselben Resultat für den Ausdruck

$$\frac{c}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 B_{kl}^* (a_1 b_4 + b_1 a_4) B_{kl},$$

wie in der von Anfang zitierten Abhandlung. Analog wie in dieser (d.h. unter <sup>(1)</sup>) angeführten Abhandlung könnten wir denselben Ausdruck durch den Ausdruck

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^4 \sum_{l=1}^4 B_{kl}^* (a_4 + b_4) B_{kl}$$

ausdrücken. Wenn wir noch die analoge Rechnung mittels der Planwelle

$$\Psi_{kl} = C_{kl} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_x x + p_y y + p_z z + Ut) \right],$$

durchführen würden, so würden wir zuletzt zu dem Resultat gelangen, daß die erste Zeile auf der rechten Seite der Gleichung (4) auf eine geradlinige und



gleichförmige Bewegung des de Broglieschen Teilchens mit dem Spin 1 (vom Typus des Mesons) hinweist. Ein explizites Aufschreiben der zweiten Zeile in der Gleichung (4) würde uns unmittelbar zu dem Schrödingerschen Zittern des Teilchens führen.

Ein solches Endresultat könnte man schon voraus erwarten unter der Voraussetzung, daß die Brogliesche Theorie in ihrer verschiedenen Modifikationen an keinen inneren Widerspruch leidet. Man ersieht also, daß die Ableitung in der vorherigen Abhandlung nur hinreichend, nicht aber notwendig ist.

---

#### RIASSUNTO (\*)

In base sia ad una monografia già apparsa sia a calcoli eseguiti dall'Autore si mostra qui con semplice indicazione di questi calcoli come, nella deduzione dell'agitazione di Schrödinger delle particelle di de Broglie con spin 1 di tipo mesonico ci si possa servire delle equazioni di Dirac invece di quelle di de Broglie. Nella seconda parte del presente lavoro, anche qui con semplice indicazione dei calcoli, si mostra come, per mezzo della nuova teoria di de Broglie delle particelle con spin 1 di tipo mesonico, si possa dedurre l'agitazione di Schrödinger di tali particelle.

---

(\*) *Traduzione a cura della Redazione.*

## Effetto di transizione delle stelle di disintegrazione in lastre nucleari sotto piccoli spessori.

G. BELLIBONI, L. FABBRICHESI, L. DE MARCO e M. MERLIN

*Istituto di Fisica dell'Università, Centro di studio degli Ioni veloci del C.N.R. - Padova*

(ricevuto il 24 Marzo 1951)

**Riassunto.** — Si riportano misure di stelle di disintegrazione in lastre nucleari esposte sotto piccoli spessori di Pb ed Al, secondo una nuova disposizione geometrica. È confermata l'esistenza di un massimo per stelle di 3 o 4 rami sotto 0,5 cm di Pb, e 2 cm di Al, indicata da un'esperienza precedente. Si riscontra inoltre che la pendenza delle curve di assorbimento per stelle da 5 rami in su è nettamente maggiore nei primi 2 o 3 cm di assorbitore di quella che corrisponderebbe alla sezione d'urto geometrica. Si discutono le possibili interpretazioni di questi effetti, prendendo in considerazione sia il frenamento per ionizzazione dei protoni primari, sia la creazione di stelle per fotodisintegrazione.

### 1. — Introduzione.

In una nota precedente, di MALASPINA, MERLIN, PIERUCCI e ROSTAGNI, che verrà in seguito citata come N.I <sup>(1)</sup>, sono stati riferiti i risultati di osservazioni sulle stelle di disintegrazione in lastre Ilford C2 esposte sotto assorbitori di Pb e Al a 4550 m (M. Rosa). Oltre a confermare l'esistenza di un effetto di transizione nel Pb con massimo sotto spessori dell'ordine del cm, per le stelle di 3 o 4 rami, effetto già osservato da altri autori <sup>(2)</sup>, il lavoro citato reca i seguenti risultati:

<sup>(1)</sup> L. MALASPINA, M. MERLIN, O. PIERUCCI e A. ROSTAGNI: *Nuovo Cimento*, **7**, 145 (1950).

<sup>(2)</sup> G. BERNARDINI, G. CORTINI e A. MANFREDINI: *Nuovo Cimento*, **6**, 456 (1949).



1) l'Al dà pure luogo ad un effetto di transizione per le stelle a 3 o 4 rami, con massimo verso i 2 cm di spessore;

2) il numero di stelle generate in una lastra semplicemente appoggiata sopra l'assorbitore (in particolare col Pb) è aumentato rispetto a quello che si verifica in una lastra campione isolata;

3) la legge di variazione del numero di stelle collo spessore del materiale assorbente, oltre al massimo in questione, presenta altre anomalie sistematiche, che hanno fatto pensare ad un secondo massimo, e che allora sembrava di dover attribuire piuttosto ad effetti geometrici.

Esperienze eseguite successivamente in condizioni geometriche più semplici, ci consentono ora di recare nuovi contributi ai problemi sollevati in N.I. in particolare per quanto riguarda i piccoli spessori.

## 2. — Descrizione delle esperienze.

L'esposizione avvenne ancora alla Capanna Regina Margherita sul M. Rosa (4550 m) nell'estate 1949. Furono esposte lastre Ilford G5 da 200  $\mu$  di spessore, di 5  $\times$  5 cm<sup>2</sup>, accoppiate a due a due a sandwich. Le singole coppie vennero poste separatamente ciascuna sotto uno speciale assorbitore dello spessore voluto, di sezione quadrata, di lato variabile a seconda dello spessore, in modo che dalla lastra l'assorbitore stesso fosse visto sempre sotto il medesimo angolo solido. In tab. I sono indicate le dimensioni dei blocchi usati.

TABELLA I.

	Pb				Al		
	0,5	1	1,5	2	1	2	3
Spessore in cm	0,5	1	1,5	2	1	2	3
Lato in cm	6,2	6,7	7,2	7,7	6,7	7,7	8,8

Le lastre coi rispettivi blocchi furono disposte su di un piano orizzontale, ad una certa distanza l'una dall'altra, entro una apposita scatola di latta di 0,5 mm, a chiusura ermetica, entro la gabbia meteorologica sulla torretta della Capanna, cosicchè pur essendo garantite contro il depositarsi della neve (che il vento provvede a spazzare continuamente), e protette dai raggi del sole, si potevano ritenere esposte direttamente alla radiazione dell'atmosfera. L'esposizione durò 28 giorni e fu seguita subito dallo sviluppo.

Nell'esplorazione sono state individuate circa 4400 stelle con 3 o più rami. La ripartizione di queste in funzione del numero di rami e dello spessore di

assorbitore sovrastante è indicata nelle tab. II e III. Le diverse colonne contengono i numeri di stelle con  $n$  e più rami per  $\text{cm}^3$  e per giorno di esposizione. Le righe corrispondono ai vari spessori di assorbimento in cm.

TABELLA II. — Stelle a  $n$  e più rami per  $\text{cm}^3$  e per giorno sotto Pb.

$\begin{array}{c} n \\ \text{cm} \end{array}$	$\geq 3$	$\geq 4$	$\geq 5$	$\geq 6$	$\geq 7$	$\geq 8$
0	$34,1 \pm 1,5$	$22,1 \pm 1,3$	$15,3 \pm 1,1$	$9,7 \pm 0,8$	$6,2 \pm 0,6$	$4,2 \pm 0,5$
0,5	$41,2 \pm 1,5$	$25,4 \pm 1,2$	$14,6 \pm 0,9$	$9,1 \pm 0,7$	$6,1 \pm 0,6$	$4,4 \pm 0,5$
1	$37,2 \pm 1,5$	$22,9 \pm 1,2$	$13,9 \pm 0,9$	$8,2 \pm 0,7$	$5 \pm 0,5$	$3,2 \pm 0,4$
1,5	$32,8 \pm 1,4$	$20,8 \pm 1,1$	$12,7 \pm 0,8$	$7,9 \pm 0,7$	$5,4 \pm 0,5$	$4,6 \pm 0,4$
2	$33,8 \pm 1,4$	$20,1 \pm 1,1$	$12,1 \pm 0,8$	$7,3 \pm 0,7$	$5,1 \pm 0,5$	$3,7 \pm 0,5$

TABELLA III. — Stelle a  $n$  e più rami per  $\text{cm}^3$  e per giorno sotto Al.

$\begin{array}{c} n \\ \text{cm} \end{array}$	$\geq 3$	$\geq 4$	$\geq 5$	$\geq 6$	$\geq 7$	$\geq 8$
0	$34,1 \pm 1,5$	$22,1 \pm 1,3$	$15,3 \pm 1,1$	$9,7 \pm 0,8$	$6,2 \pm 0,6$	$4,2 \pm 0,5$
1	$35,2 \pm 1,4$	$22,1 \pm 1,2$	$13 \pm 0,9$	$7,8 \pm 0,7$	$5,4 \pm 0,6$	$3,6 \pm 0,5$
2	$36,5 \pm 1,5$	$22,5 \pm 1,2$	$12,1 \pm 0,9$	$7,4 \pm 0,7$	$5,1 \pm 0,6$	$3,9 \pm 0,5$
3	$33,3 \pm 2$	$19,5 \pm 1,5$	$12,9 \pm 1,2$	$8,6 \pm 1,1$	$5,2 \pm 0,8$	$3,9 \pm 0,7$

Nei grafici di fig. 1 e 2 sono riportati i numeri di stelle con almeno 3, 4... rami in funzione dello spessore di assorbitore e normalizzati per le stelle a 3 e più rami senza assorbitore.

Da un primo esame dei dati relativi a vari spessori si possono trarre le seguenti indicazioni:

1) È confermata l'esistenza di un massimo tanto nel caso del Pb che in quello dell'Al, per le curve relative ad un numero di rami  $\geq 3$ ,  $\geq 4$ ; tale massimo scompare per le stelle con un numero di rami  $\geq 5$ . Rispetto alle precedenti determinazioni, nelle quali erano stati meno suddivisi i piccoli spessori, la posizione del massimo relativo al Pb risulta meglio individuata alla profondità di 0,5 cm. Per l'Al la posizione del massimo viene confermata a



circa 2 cm. Notiamo che il rapporto delle profondità dei due massimi sta circa come il rapporto delle densità dei due assorbitori.

2) Nelle curve relative alle stelle con un numero di rami  $\geq 5$ , la decrescenza del numero di stelle in funzione dello spessore procede in modo rego-

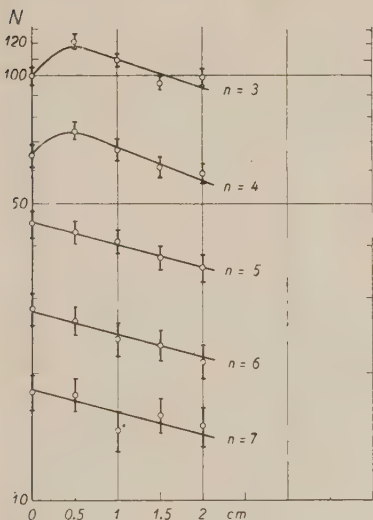


Fig. 1. —  $N$  = numero di stelle con almeno  $n$  rami sotto vari spessori di Pb.

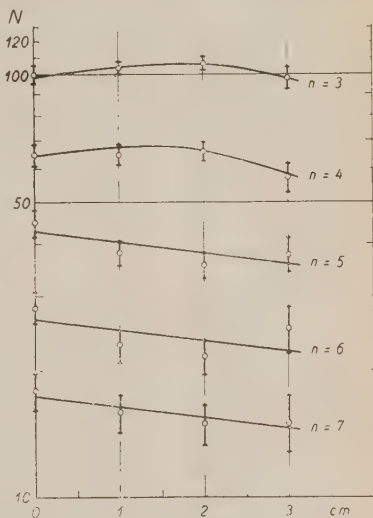


Fig. 2. —  $N$  = numero di stelle con almeno  $n$  rami sotto vari spessori di Al.

lare, specie per il Pb: questo fatto ci ha permesso di determinare negli spessori disponibili il cammino d'assorbimento della radiazione stellogena assumendo una legge del tipo esponenziale. I valori ottenuti col metodo dei minimi quadrati su 2 cm di spessore per il Pb, e su 3 cm di spessore per l'Al risultano:

$$\lambda_{\text{Pb}} = 94 \text{ g/cm}^2, \quad \lambda_{\text{Al}} = 47 \text{ g/cm}^2.$$

Questi valori sono non solo assai minori dei soliti valori dedotti da misure su notevoli spessori di assorbitore, ma addirittura minori dei rispettivi c.l.m. corrispondenti alle sezioni d'urto geometriche dei nuclei di Pb ed Al, pari a  $\lambda_{\text{Pb geom}} = 130 \text{ g/cm}^2$ ,  $\lambda_{\text{Al geom}} = 70 \text{ g/cm}^2$ .

Riteniamo che questo risultato, alquanto inatteso, non sia simulato da fluttuazioni statistiche, data la regolarità nella disposizione dei punti, almeno nelle curve relative al Pb. In base ad esso abbiamo anzi riesaminato pure le curve di assorbimento relative alla N.I., sia quelle pubblicate che altre non pubblicate, ed abbiamo così constatato che sistematicamente in tutte le curve la pendenza è forte nei primi due o tre centimetri di assorbitore, ed

è seguita da una zona di stasi con accenno a un debole massimo fra i 5 e i 10 cm (di cui è fatto cenno in N.I.); in media quindi la decrescenza appare lenta, in accordo coi valori dei cammini d'assorbimento adottati.

Siamo perciò indotti a ritenere che le anomalie riscontrate nelle curve della N.I., ed attribuite allora ad effetti geometrici ed al concorso eventuale di errori statistici, abbiano invece un significato reale. L'andamento complicato della curva rappresentativa dei numeri di stelle in funzione dello spessore sarebbe il risultato della sovrapposizione di due effetti: un *effetto A*, che si potrebbe chiamare « di primo strato » in quanto si esaurisce nei primi 2 o 3 cm di materiale, ed un *effetto B*, « di profondità » che si fa sentire su spessori dell'ordine del dm.

### 3. — Discussione.

Cercheremo ora di vedere se sia possibile rendersi conto di questi due effetti. A tale riguardo, ci riferiremo in seguito di preferenza ai dati relativi al Pb, per il quale le considerazioni teoriche sono più facili allo stato attuale.

Una teoria di DALLAPORTA, MERLIN e PUPPI<sup>(3)</sup> attribuisce l'effetto di transizione a neutroni secondari generati dalla radiazione primaria nel Pb, i quali a loro volta generano stelle secondarie. Con tale teoria si era cercato di giustificare i risultati della N.I., in particolare il fatto che il numero di stelle di piccola energia aumenta nelle lastre semplicemente appoggiate sopra l'assorbitore. L'interpretazione era apparsa soddisfacente, almeno nelle linee generali, un confronto molto esatto non essendo possibile per la relativa complessità

TABELLA IV.

$F(0.5)$	=	3,1
$F(1)$	=	5,4
$F(1.5)$	=	7,4
$F(2)$	=	9,4
$F(3)$	=	12,8

della geometria di quella esperienza. Ora appare molto probabile che l'azione dei neutroni, i quali nel Pb debbono avere un c.l.m. di circa 200 g/cm<sup>2</sup>, possa spiegare l'aumento nelle lastre appoggiate e l'effetto di profondità ma non quello di primo strato. Nelle esperienze di N.I. i due effetti si presentavano sovrapposti, mentre le esperienze attuali non possono rivelare che l'effetto *A*.

Abbiamo infatti tentato di calcolare l'effetto dei neutroni per la nuova geometria del dispositivo. I risultati del calcolo che forniscono il fattore geometrico  $F(z_0)$  definito nel lavoro di DALLAPORTA e coll., sono esposti nella tab. IV, e mostrano come il contributo dei neutroni vada costantemente crescendo e non diventi massimo cogli spessori qui adoperati.

Si è anche voluto verificare se su qualche lastra oltre al proprio assorbitore potessero influire come radiatori i blocchi posti sulle lastre vicine, le cui

<sup>(3)</sup> N. DALLAPORTA, M. MERLIN e G. PUPPI: *Nuovo Cimento*, 7, 99 (1950).

distanze erano note; ma si è trovato che l'aumento del fattore geometrico  $F(z)$  che da ciò può derivare è sempre inferiore al 10%. Riteniamo quindi che la geometria dell'attuale esperienza permetta di escludere l'attribuzione dell'effetto  $A$  ai neutroni: ci sembra invece probabile che ad essi si debba attribuire il pianerottolo seguente (secondo massimo) delle curve di N.I., cioè l'effetto  $B$ . Tale questione però esula dai limiti del presente lavoro.

L'effetto  $A$  consiste sia in un decremento rapido delle stelle con un numero di rami  $\geq 5$ , sia in un aumento delle stelle da 3 o 4 rami, con un massimo sotto 0,5 cm nel Pb, seguito a sua volta da un rapido decremento.

Per tentare di spiegare almeno qualitativamente questi due fatti abbiamo preso in esame due possibilità:

- a) frenamento per ionizzazione dei protoni della primaria stellogena;
- b) generazione di stelle dovuta alla componente elettrofotonica.

Analizziamo la prima possibilità. Attraversando l'assorbitore lo spettro protonico incidente slitta verso le energie minori per effetto delle perdite per ionizzazione. Se è lecito assumere come indicatrice dello spettro protonico la curva che dà il numero  $N$  di stelle in funzione del numero  $n$  di rami, e se tale curva ha un andamento del tipo schematizzato in fig. 3, come sembra plausibile, lo slittamento può avere un duplice effetto:

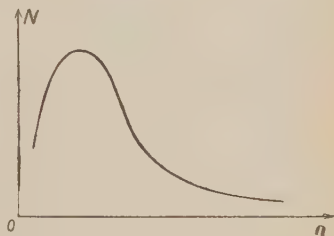


Fig. 3.

— per le stelle con un numero  $n$  di rami superiore a quello che corrisponde al massimo della curva indicatrice esso porta evidentemente ad una riduzione del numero di tali stelle, che si somma a quella dovuta all'assorbimento per urto, e quindi, in definitiva, ad una pendenza sperimentale maggiore;

— per le stelle con un numero  $n$  di rami inferiore a quello che corrisponde al massimo, esso porta invece ad un aumento fino a una certa profondità nell'assorbitore.

Naturalmente tali effetti, che si riferiscono solo alle stelle generate dalla componente protonica, saranno in buona parte mascherati dallo sfondo molto più vistoso costituito dalle stelle generate dalla componente neutronica. Per tentare un calcolo approssimato di questi effetti i dati migliori sui quali possiamo fondarci sono forniti dalle statistiche di Bristol <sup>(4)</sup>, che distinguono stelle generate da primari ionizzanti e non ionizzanti. Osserviamo però che la statistica di Bristol non dà un quadro esatto per le basse energie. Una stella infatti viene considerata generata da protoni solo quando si tratta di protoni

<sup>(4)</sup> R. H. BROWN, U. CAMERINI, P. H. FOWLER, H. HEITLER, D. T. KING e C. F. POWELL: *Phil. Mag.*, **40**, 862 (1949).



con ionizzazione specifica  $\leq 1,5$  volte il minimo, corrispondente ad una energia superiore a 400 MeV. Ne segue che lo spettro di protoni dato da Bristol indica solo un limite inferiore del contributo effettivo dei protoni: esso va certamente integrato da un'altra frazione di protoni di bassa energia, che allo stato attuale è estremamente difficile valutare <sup>(2)</sup>.

Un conto molto grossolano per le basse energie fa vedere subito che comunque non è possibile interpretare quantitativamente per questa via il massimo per le stelle di pochi rami. La differenza di energia media fra stelle di  $n + 1$  rami e  $n$  rami è infatti, per valori bassi di  $n$ , dell'ordine di 50 MeV. La perdita di energia di un protone di circa 250 MeV sotto 0,5 cm di Pb (posizione del massimo sperimentale per stelle di 3 o 4 rami) è appena di 15 MeV. Ora il massimo dell'istogramma di Bristol relativo ai protoni corrisponde a  $n \approx 5$ . Lo slittamento è quindi del tutto insufficiente per spiegare l'effetto osservato; cioè il massimo dovrebbe cadere sotto 3 cm di Pb per poter venire interpretato in tale modo. Inoltre, il valore assoluto del massimo risulterebbe assai minore di quello effettivamente osservato, a meno di modificare lo spettro protonico di bassa energia in modo assai poco plausibile.

Per le energie più alte (corrispondenti ad un numero medio di rami da 5 o 6 in su), i dati dello spettro di Bristol rispecchiano più fedelmente la divisione della nucleonica nelle sue due componenti neutronica e protonica, e con essi abbiamo fatto il calcolo del numero di protoni che sotto un dato spessore di Pb diventano inefficienti per dare origine a stelle di non meno di  $n$  rami ( $n \geq 5$ ); i risultati ottenuti dovranno sempre considerarsi come una stima minima dell'effetto. Con tali dati, il decremento totale del numero di stelle con  $n \geq 5$ , in funzione dello spessore, dovuto sia ad assorbimento della nucleonica per urto (c.l.m. geometrico), sia al frenamento dei protoni, corrisponde a un c.l.m.

$$\lambda_{\text{Pb}} = 116 \text{ g/cm}^2.$$

Nel caso dell'Al un calcolo del tutto analogo conduce al risultato:

$$\lambda_{\text{Al}} = 63 \text{ g/cm}^2.$$

I precedenti risultati mostrano come l'effetto del frenamento dei protoni possa in parte rendere conto dell'aumento di pendenza della curva di assorbimento per le stelle con  $n \geq 5$ : ma soltanto in parte, e crediamo difficile che dati più sicuri sullo spettro nucleonico permettano di migliorare molto le condizioni.

Per tale ragione, pur non escludendo che una parte dell'eccesso osservato sia dovuta all'effetto in questione, abbiamo esaminata la possibilità *b*), cioè l'origine elettrofotonica dell'effetto di transizione, che era già stata prospettata tempo addietro da HEITLER e coll. <sup>(5)</sup>. Le grandi incertezze tuttora esi-

(5) W. HEITLER, C. F. POWELL e H. HEITLER: *Nature*, **146**, 65 (1940).

stenti riguardo allo spettro della componente elettrofotonica nell'aria rendono impossibile ogni calcolo preciso. Ci siamo quindi limitati a stime orientative.

Stelle con almeno 5 rami saranno in massima parte generate da primari di almeno 300 MeV. Per energie superiori a tale valore, lo spettro elettrofotonico si potrà considerare come spettro di potenza; in tale ipotesi, secondo la teoria della cascata la forma dello spettro si conserva e l'assorbimento avviene con legge esponenziale, con un cammino di assorbimento dell'ordine di grandezza dell'unità di radiazione. Con questo cammino di assorbimento le stelle generate dalla componente fotonica non potranno che contribuire all'effetto di primo strato, accentuando ulteriormente la pendenza del primo tratto della curva di assorbimento registrata. Normalizzando sui valori dati da Rossi <sup>(6)</sup> per le intensità assolute della componente elettronica e della componente nucleonica, tenuto conto dei tagli sugli spettri dati dai dispositivi sperimentali, abbiamo valutato le intensità  $I_{ef}$  della componente elettrofotonica e  $I_N$  di quella nucleonica da 300 MeV in su, assumendo una dipendenza energetica in  $1/E$  per lo spettro elettrofotonico fino a  $2 \cdot 10^8$  eV <sup>(7)</sup>. I valori ottenuti sono:

$$I_{ef} = 0,9 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}, \quad I_N = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ sterad}^{-1}.$$

Assumendo a titolo indicativo che la sezione d'urto per fotodissociazione sia 50 volte più piccola di quella per urto nucleare, e calcolando il decremento della nucleonica in base alla sezione d'urto geometrica, della fotonica in base alla teoria della cascata, si trova per il cammino d'assorbimento complessivo

$$\lambda_{pb} = 90 \text{ g/cm}^2.$$

Malgrado le notevoli incertezze della valutazione sembra dunque che questa correzione conduca ad un ordine di grandezza soddisfacente per l'interpretazione dell'effetto.

Per quanto riguarda le stelle di bassa energia, con 3 o 4 rami, sembra molto probabile, in base ai dati ben noti della teoria della cascata elettrofotonica, che un ginocchio di forma e posizione adatte nello spettro della componente elettrofotonica incidente possa dar luogo ad un massimo per i fotoni di bassa energia sotto piccoli spessori di assorbitore. Ma allo stato attuale non crediamo di poter fare alcuna valutazione attendibile della posizione ed ampiezza di un tale massimo.

<sup>(6)</sup> B. ROSSI: *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 537 (1940).

<sup>(7)</sup> D. J. X. MONTGOMERY: *Cosmic Ray Physics* (Princeton, 1949), pag. 263.

#### 4. — Conclusione.

Dall'insieme delle esperienze riferite in N.I e nel presente lavoro per l'andamento dei numeri di stelle in lastre nucleari sotto spessori diversi di materiale emerge il seguente quadro fenomenologico, più complesso di quanto non sia sinora stato considerato. Le stelle di bassa energia subiscono un aumento, a piccoli spessori, sino a un massimo, seguito da un rapido decremento: quelle di alta energia presentano sin dall'inizio il decremento rapido, che si esaurisce, nel Piombo, in 2 o 3 cm. Dopo questo spessore il numero di stelle sia di bassa che di alta energia appare quasi stazionario o in leggero aumento per alcuni cm. Solo su spessori maggiori si può notare un progressivo regolare decremento.

Dalla discussione risultano come possibili fattori determinanti dell'andamento osservato nel primo tratto la produzione di stelle per effetto fotonucleare e la degradazione dello spettro protonico per frenamento; la produzione da parte di neutroni secondari per il secondo tratto, del pianerottolo o del secondo massimo. Ne consegue che soltanto da misure con spessori molto grandi di materiale (per il Pb qualche dm) sarà possibile desumere l'effettivo c.l.m. della nucleonica.

Dobbiamo tener presente che le ipotesi contemplate per spiegare le anomalie osservate si fondano su dati attualmente molto incerti dal punto di vista quantitativo, e che esse potranno forse risultare inadeguate quando i dati stessi siano meglio precisati. Il quadro da noi proposto vuole principalmente servire come spunto per ulteriori ricerche.

Ringraziamo vivamente il prof. A. ROSTAGNI per averci consigliato il lavoro, i proff. N. DALLAPORTA e G. PUPPI per aver discusso gli aspetti teorici del problema e le dottoresse L. BAGALÀ, L. MALASPINA e O. PIERUCCI per l'aiuto nell'esplorazione delle lastre, le officine Galileo per il dono di un microscopio usato nell'osservazione.

---

#### S U M M A R Y

New results are reported on disintegration stars observed in nuclear plates exposed at 4550 meters a.s.l. under thin layers of Pb and Al. The maximum found in a previous experience at 0.5 cm of Pb and 2 cm of Al for 3 or 4 prong stars is confirmed by the present one. The slope of absorption curves for stars with 5 or more prongs is besides in the first 2 or 3 cm of absorber clearly higher than that related to the geometrical cross-section. The possible explanations of these effects are discussed taking into account both the ionization-loss of primary protons and the production of stars by photodisintegration.



## Risonanze ( $n, n$ ) ed ( $n, p$ ) nel $P^{31}$ e $S^{32}$ .

R. RICAMO (\*)

*Istituto di Fisica del Politecnico di Zurigo*

(ricevuto il 24 marzo 1951)

**Riassunto.** — Vengono misurate e confrontate la sezione d'urto totale e quella per il processo ( $n, p$ ) nel  $P^{31}$  e  $S^{32}$  per neutroni da 1,9 a 3,66 MeV. Le tecniche di misura sono estesamente discusse. I massimi dei due processi coincidono per lo Zolfo fino a 3 MeV; per il Fosforo coincidono solo fino a 2,5 MeV. Se ne conclude che, ad energie elevate, l'idea del nucleo intermedio non è più accettabile, senza qualche modifica.

### 1. — Introduzione.

Le risonanze che si osservano nelle reazioni nucleari vengono interpretate in casi semplici dalla formula di BREIT e WIGNER <sup>(1)</sup>, eventualmente con la estensione ad essa data da BETHE <sup>(2)</sup>.

Alla base della teoria sta l'ipotesi di BOHR <sup>(3)</sup> del nucleo intermedio e la elaborazione quantistica <sup>(4)</sup> che permette di calcolare la probabilità di transizione in dipendenza dall'elemento di matrice della perturbazione.

Si hanno ora forti argomenti per dubitare della validità generale dell'ipotesi di BOHR, argomenti che sono stati riassunti nella critica di WEISSKOPF <sup>(5)</sup>.

Indicando secondo l'uso la reazione nucleare con l'espressione

$$(1) \quad a + A \rightarrow {}^*C \rightarrow b + B + Q,$$

(\*) Dell'Istituto di Fisica dell'Università di Bologna.

<sup>(1)</sup> G. BREIT e E. WIGNER: *Phys. Rev.*, **49**, 519 (1936).

<sup>(2)</sup> H. A. BETHE: *Rev. Mod. Phys.*, **9**, 186 (1937).

<sup>(3)</sup> N. BOHR: *Nature*, **137**, 344 (1936).

<sup>(4)</sup> L. J. SCHIFF: *Quantum Mechanics* (New-York, 1949), pag. 193.

<sup>(5)</sup> V. WEISSKOPF: *Helv. Phys. Acta*, **21**, 278 (1948).

la migliore prova sperimentale diretta della validità dell'ipotesi di BOHR sarebbe data dal constatare che la probabilità di formazione dei prodotti finali  $b + B$  è la medesima per tutti i processi che portano al medesimo stato intermedio  $*C$ , anche per nuclei iniziali diversi.

La deficienza di dati sperimentali e le difficoltà sperimentali precludono per ora un'analisi di tale genere.

Un controllo meno severo dell'ipotesi del nucleo intermedio può essere fatto invece se si confrontano i diversi processi che avvengono a partire da condizioni iniziali  $a - A$  identiche, cioè per il medesimo nucleo  $A$  e per particelle di tipo  $a$  dotate della medesima energia.

È stato mostrato da ALLEN *et al.* <sup>(6)</sup> <sup>(7)</sup> che per la reazione  $\text{Be}^9(n, \alpha)\text{He}^6$  si ha una risonanza a 2,6 MeV e che la sezione d'urto totale  $\sigma_t$  per i neutroni presenta anch'essa una risonanza a tale energia. Misure eseguite recentemente nel laboratorio Tensator del Politecnico di Zurigo e non ancora pubblicate, hanno mostrato che il massimo per le sezioni d'urto totale del  $\text{Be}^9$  si ha a 2,8 MeV anziché a 2,6, per cui il lavoro di ALLEN va riesaminato.

Se si accetta il risultato di ALLEN esso mostra come plausibile l'idea del nucleo intermedio. Infatti il rapporto delle sezioni d'urto dei due processi  $(n, \alpha)$  e urto elastico si identifica con il fattore di Gamow per la trasparenza della barriera coulombiana <sup>(2)</sup>. La sezione d'urto elastica  $\sigma(n, n)$ , qualora un solo processo  $(n, x)$  sia presente, è data praticamente dalla differenza:

$$\sigma(n, n) = \sigma_t - \sigma(n, x),$$

e per

$$\sigma(n, x) \ll \sigma_t$$

si ha

$$\sigma(n, n) = \sigma_t.$$

Per il  $\text{Li}^7$  si ha notizia di una risonanza  $\sigma(n, \alpha)$  a 0,28 MeV (BLAIR *et al.*) e per  $\sigma_t$  a 0,25 MeV (ADAIR) (notizie del rapporto di ADAIR <sup>(8)</sup>).

Per l'azoto  $\text{N}^{14}$  è noto <sup>(9)</sup> che  $\sigma(n, p)$  e  $\sigma(n, \alpha)$  presentano entrambe un massimo a 1,4 MeV, ma a 1,8 MeV si ha un massimo per  $\sigma(n, x)$  e non per  $\sigma(n, p)$ . A 2,26 MeV si ha un massimo sia per  $\sigma(n, \alpha)$  che per  $\sigma(n, p)$ , mentre a 2,56 e 2,75 MeV si hanno risonanze per  $\sigma(n, \alpha)$  e non per  $\sigma(n, p)$ : il contrario accade a 2,80 MeV <sup>(10)</sup>.

<sup>(6)</sup> K. W. ALLEN, W. E. BURCHAM e D. E. WILKINSON: *Nature*, **159**, 473 (1947).

<sup>(7)</sup> K. W. ALLEN, W. E. BURCHAM e D. E. WILKINSON: *Proc. Roy. Soc.*, **192**, 114 (1948).

<sup>(8)</sup> R. K. ADAIR: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 256 (1950).

<sup>(9)</sup> C. H. JOHNSON e H. H. BARSCHALL, pubblicato da R. K. ADAIR: *Rev. Mod. Phys.*, **22**, 259 (1950).

<sup>(10)</sup> W. A. BOLLMANN, W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, in corso di pubblicazione.

Se vale l'ipotesi di BOHR tutti i massimi dei processi ( $n, \alpha$ ), ( $n, p$ ), ecc., si devono ritrovare nella  $\sigma_i$  moltiplicati per l'inverso del fattore di Gamow, cioè ampliati per un coefficiente circa 50.

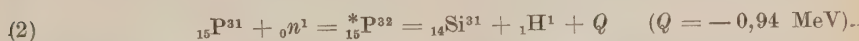
La  $\sigma_i$  dell'Azoto per neutroni, non è praticamente nota; la sua misura è in corso al Politecnico di Zurigo. La conoscenza di essa permetterà forse di rendersi conto, ad es., del perchè possa aversi risonanza ( $n, \alpha$ ) per neutroni di una certa energia e non si abbia risonanza per il processo ( $n, p$ ).

In generale confronti di tale genere sono severamente ristretti da difficoltà sperimentali. E infatti necessaria una rigorosa precisazione dell'energia delle particelle incidenti ed è richiesto l'uso di tecniche spesso estremamente diverse per lo studio dei diversi processi, cosicchè difficilmente il medesimo sperimentatore può affrontare entrambe.

Poichè era stata in precedenza misurata <sup>(11)</sup> la sezione d'urto del processo ( $n, p$ ) per  $P^{31}$  e  $S^{32}$  e si era avviata la tecnica per le misure di trasmissione <sup>(12)</sup>, si è tentato con questo lavoro il confronto tra le sezioni d'urto dei due processi.

A causa dell'estrema complessità dei risultati è stato necessario raffinare al massimo la tecnica delle misure di trasmissione come è descritto nel seguito. La dubbia corrispondenza dei massimi di  $\sigma(n, p)$  e  $\sigma_i$  per il Fosforo ha imposto inoltre il perfezionamento delle precedenti misure di  $\sigma(n, p)$ .

Il metodo seguito per la misura di  $\sigma(n, p)$  è ancora quello della attivazione. Si ha infatti per il Fosforo



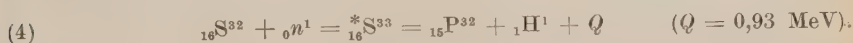
Il nucleo intermedio  $P^{32}$  è eccitato con  $8,3 \text{ MeV} + 31/32 E_n$ .

Successivamente il  $Si^{31}$  decade per emissione di elettroni negativi:



con tempo di dimezzamento  $T = 155 \text{ m}$ .

Analogamente per lo Zolfo si ha:



Il nucleo intermedio  $S^{33}$  è eccitato con  $9,3 \text{ MeV} + 32/33 E_n$ . Il  $P^{32}$  quindi decade e si ha



con tempo di dimezzamento  $T = 14,3 \text{ giorni}$ .

<sup>(11)</sup> E. LÜSCHER, R. RICAMO, P. SCHERRER e W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 561 (1950).

<sup>(12)</sup> R. RICAMO, W. ZÜNTI, E. BALDINGER e P. HUBER: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 508 (1950).



La misura dell'attività  $\beta$  permette in entrambi i casi di risalire alla sezione d'urto per il processo  $(n, p)$ .

La scelta del Fosforo e dello Zolfo per questo studio è suggerita anche dal fatto che rispetto agli altri nuclei essi presentano i valori di  $Q$ ,  $T$ ,  $\sigma(n, p)$  ed  $E(\beta)$  più convenienti per misure di tale genere.

## 2. - Misura della sezione d'urto totale.

Indicando con  $T$  il coefficiente di trasmissione, vale a dire il rapporto tra l'intensità  $I_1$  del fascio di neutroni trasmesso e quella  $I_0$  del fascio incidente, si ha, nell'ipotesi che l'eliminazione di un neutrone dal fascio avvenga in un singolo processo elementare,

$$(6) \quad T = I_1/I_0 = \exp[-\sigma_t n],$$

dove  $n$  è il numero di nuclei della sostanza in esame per  $\text{cm}^2$  di sezione normale del fascio e  $\sigma_t$  è la sezione d'urto totale.

Poichè in generale è possibile scegliere  $n$  a piacere, ci si pone la domanda se, ai fini della precisione della misura esista per esso un valore ottimo. Il problema è trattato in Appendice dove per ogni valore del fondo in relazione all'intensità della sorgente è dato il valore più conveniente di  $n$ ; il valore del coefficiente di trasmissione corrispondente è indicato con  $T_{\text{opt}}$ .

Le grandezze  $I_0$  ed  $I_1$  non sono però direttamente misurabili. Il rivelatore conta infatti  $n_0$  neutroni al secondo in assenza di assorbitore ed  $n_1$  con il corpo in esame interposto, ma non tutti provengono direttamente dalla sorgente: una parte, rispettivamente  $n_{0f}$  ed  $n_{1f}$ , costituisce il fondo. Indicando con l'indice  $d$  i neutroni che arrivano direttamente al rivelatore dalla sorgente, si ha

$$(7) \quad n_0 = n_{0d} + n_{0f}; \quad n_1 = T n_{1d} + n_{1f}.$$

Per procurarsi una terza equazione è necessario misurare il numero  $n_2$  di neutroni trasmessi da un corpo di coefficiente di trasmissione  $R$  noto. Si ha allora

$$(8) \quad n_2 = R n_{2d} + n_{2f}.$$

Se la sorgente di neutroni ha intensità costante nel tempo, allora è  $n_{0d} = n_{1d} = n_{2d}$ . Se supponiamo anche che sia

$$(9) \quad n_{0f} = k n_{0d}; \quad n_{1f} = k n_{1d}; \quad n_{2f} = k n_{2d},$$

si ha facilmente dalle (7) e (8):

$$(10) \quad T = 1 - (1 - R) \frac{n_0 - n_1}{n_0 - n_2},$$

o se si vuole

$$(11) \quad T = R + (1 - R) \frac{n_1 - n_2}{n_0 - n_2}.$$

Solitamente si sceglie  $R$  prossimo a zero, in modo che l'errore con cui è conosciuto abbia poca influenza nella misura di  $T$ .

Abbiamo scelto un cilindro di stirene ( $C_6H_5CHCH_2-C_6H_5$ ) lungo circa 200 mm. Il diametro di esso come quello dei corpi di cui si è misurata la  $\sigma_t$  è di 24 mm. La sezione d'urto totale in funzione dell'energia per l'Idrogeno è nota <sup>(13)</sup>, <sup>(14)</sup>; quella del Carbonio è stata recentemente misurata <sup>(12)</sup>, così è possibile calcolare la trasmissione teorica  $R_0$  dello stirene:

$$R_0 = \exp \{ -n[\sigma_t(C) + \sigma_t(H)] \}.$$

Per avere la trasmissione pratica  $R$ , bisogna correggere  $R_0$  per l'effetto di « in scattering » come è detto più avanti.

Poichè non è possibile tenere costante l'intensità della sorgente dei neutroni nel tempo necessario per la misura di  $n_0$ ,  $n_1$  ed  $n_2$ , occorre misurarla continuamente con un secondo rivelatore che chiameremo « monitor ». Questo conti  $m_0$ ,  $m_1$ ,  $m_2$  neutroni mentre il rivelatore principale ne conta rispettivamente  $n_0$ ,  $n_1$ ,  $n_2$ . Allora è

$$(12) \quad h = \frac{n_{0d}}{m_0} = \frac{n_{1d}}{m_1} = \frac{n_{2d}}{m_2},$$

dove con  $h$  indichiamo un coefficiente che dipende dalla geometria e dal rendimento del rivelatore principale e del monitor. Indicando con  $r_0$ ,  $r_1$ ,  $r_2$  le intensità dei neutroni normalizzate al monitor, si ha, nell'ipotesi che valgano le (7) e (8)

$$(13) \quad r_0 = \frac{n_0}{m_0} = \frac{n_{0d}(1+k)}{m_0}; \quad r_1 = \frac{n_1}{m_1} = \frac{n_{1d}(T+k)}{m_1}; \quad r_2 = \frac{n_2}{m_2} = \frac{n_{2d}(R+k)}{m_2}.$$

Noi supporremo che  $h$  sia costante nel tempo e indipendente dall'energia dei neutroni. Per una trattazione approfondita della precisione delle misure occorre però osservare che  $h$  in effetti è una grandezza che subisce delle fluttuazioni statistiche.

Dalle (13) si ottiene facilmente

$$(14) \quad T = 1 - (1 - R) \frac{r_0 - r_1}{r_0 - r_2},$$

<sup>(13)</sup> L. ROSENFELD: *Nuclear Forces* (Amsterdam, 1948), pag. 129.

<sup>(14)</sup> E. E. LAMPI, G. D. FREIER e J. H. WILLIAMS: *Phys. Rev.*, **80**, 853 (1950).

valida per quanto abbiamo detto, anche per sorgente di intensità non costante, ma solo nel caso che il fondo sia proporzionale all'intensità della sorgente. Nel seguito, per brevità, scriveremo la (14), con ovvie sostituzioni dei simboli, nel seguente modo:

$$(15) \quad T = 1 - \tau_{fe}.$$

Al rivelatore principale giungono, com'è noto <sup>(14)</sup>, nell'unità di tempo oltre ai  $I_0 T_0 \omega_0$  neutroni del fascio di angolo solido  $\omega_0$  (fig. 1a) anche quelli del

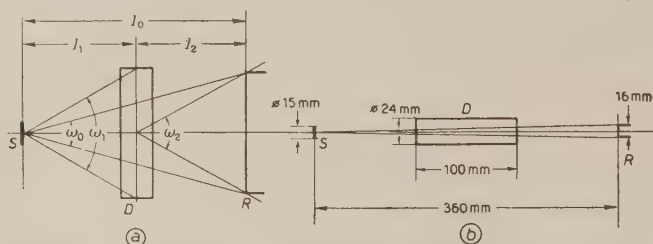


Fig. 1. - Geometria delle esperienze di trasmissione.  $S$  è la sorgente,  $D$  il corpo in esame ed  $R$  il rivelatore. In  $a$ ) condizioni generiche; in  $b$ ) geometria nelle nostre esperienze.

fascio di angolo solido  $\omega_1$  che in seguito ad uno o più urti vengono diffusi in direzione del rivelatore. Quest'ultimo fatto dà luogo ad un apparente aumento della trasmissione, aumento che dipende da  $\omega_1$ ,  $T_0$  e dall'angolo solido  $\omega_2$  sotto il quale è visto il rivelatore dal corpo diffondente.

Al corpo in istudio giungono  $I_0 \omega_1$  neutroni al secondo, di questi ne vengono diffusi in tutto lo spazio  $I_0(1 - T_0)\omega_1$  con intensità quindi  $I_0(1 - T_0)\omega_1/4\pi$ , se supponiamo che la diffusione sia isotropa. Per effetto della diffusione verso il rivelatore, vengono perciò rivelati in più  $I_0(1 - T_0)\omega_1\omega_2/4\pi$  al secondo e la trasmissione misurata ( $T_{sp}$ ) risulta aumentata di

$$(16) \quad \Delta T = T_{sp} - T_0 = (1 - T_0) \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi \omega_0} = (1 - T_0) G,$$

avendo indicato con  $G$  il fattore geometrico:

$$(17) \quad G = \frac{\omega_1 \omega_2}{4\pi \omega_0}.$$

Detta  $A_D$  l'area della sezione normale del corpo diffondente e  $A_R$  quella utile del rivelatore, si ha, con le notazioni di fig. 1a

$$(18) \quad G = \frac{A_D}{l_1^2} \frac{A_R}{l_2^2} \frac{l_0^2}{4\pi A_R}.$$



Per  $l_0$  costante, la condizione di minimo per  $G$  si ottiene immediatamente e risulta

$$(19) \quad G = \text{minimo} \quad \text{per} \quad l_1 = l_2,$$

nel quale caso si ha semplicemente

$$(20) \quad G = \frac{\omega_1}{\tau}.$$

Se il corpo diffondente è un cilindro di diametro  $d$  e lo si pone a metà distanza tra la sorgente il rivelatore, si ha:

$$(21) \quad G = \frac{d^2}{4l_1^2}.$$

Nelle nostre esperienze era  $d = 24$  mm,  $l_1 = 180$  mm, quindi  $G = 0.35 \cdot 10^{-2}$ .

In ogni caso  $G$  non dipende, in questa trattazione elementare, dall'area del rivelatore, questa determina invece in parte il potere risolutivo del dispositivo di misura, in relazione all'angolo  $\vartheta$  di osservazione secondo il quale vengono raccolti i neutroni.

In effetti il fattore  $G$  dovrebbe tener conto dell'eventuale anisotropia della radiazione diffusa, non si dovrebbe inoltre trascurare l'effetto della diffusione multipla e dell'eventuale dipendenza dell'efficienza del rivelatore dall'energia dei neutroni, avendo quelli diffusi energia in generale diversa da quelli primari. La trattazione rigorosa del problema è però, come è noto, molto ardua anche per le difficili condizioni al contorno.

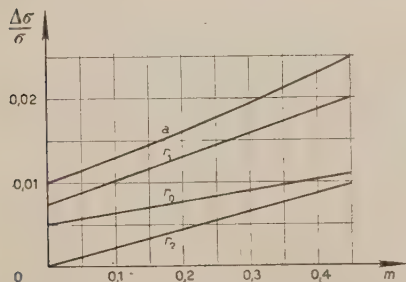


Fig. 3. - Errore relativo nella misura della sezione d'urto per trasmissione  $T = 0,25$  in funzione del fondo relativo  $m$ .

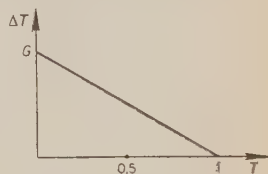


Fig. 2. - Correzione  $\Delta T$  del fattore di trasmissione  $T$  per effetto di diffusione verso il rivelatore.

La dipendenza lineare di  $\Delta T$  da  $\omega_1$  è stata verificata sperimentalmente <sup>(14)</sup>. Osserviamo che per la (16)  $\Delta T$  è inoltre linearmente dipendente da  $T_0$ , come è illustrato in fig. 2, il che torna particolarmente comodo per il calcolo di  $\sigma_t$ .

Il procedimento più conveniente per la misura di  $\mu$  è suggerito dall'esame delle varie cause di errore. L'esame della (45) mostra infatti che anche per errori relativi uguali in  $r_0$ ,  $r_1$  ed  $r_2$ , il loro peso, il contributo

cioè dato dal termine ad essi corrispondente all'errore nella misura della sezione d'urto totale, è sensibilmente diverso. Si può facilmente mostrare, ad es., che per qualunque valore di  $T$  e di  $m$ , definito dalla (37), il coefficiente di  $k_1$  è sempre maggiore di quelli di  $k_0$  e  $k_2$ .

In fig. 3, curva a), è dato l'andamento di  $\Delta\sigma/\sigma$  calcolato secondo la (45) in funzione di  $m$  per  $T = 0,25$  e per  $k_0 = k_1 = k_2 = 10^{-2}$ . Le curve contras-

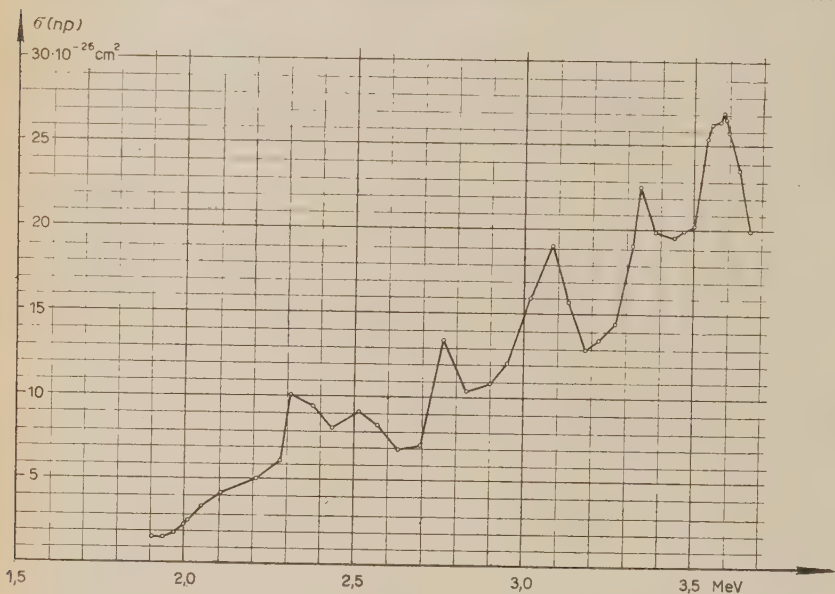


Fig. 4. - Sezione d'urto del processo  $S^{32}(n, p)P^{32}$  in funzione dell'energia. (Curva riportata da (11)).

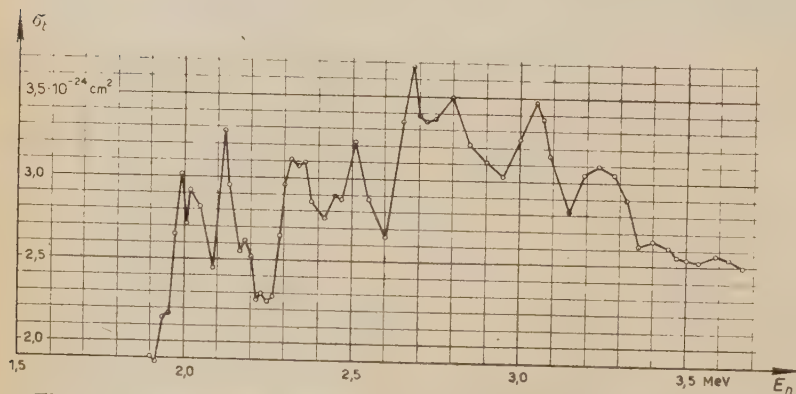


Fig. 5. - Sezione d'urto totale di  $S^{32}$  in funzione dell'energia dei neutroni.

segnate con  $r_0, r_1, r_2$  danno invece  $\Delta\sigma/\sigma$  nell'ipotesi che sia presente solo l'errore nel termine corrispondente al contrassegno.

Stante il maggior peso dell'errore nella misura di  $r_1$ , si è misurato per ogni valore dell'energia dei neutroni, una volta il valore di  $r_0$  ed  $r_2$  e due volte

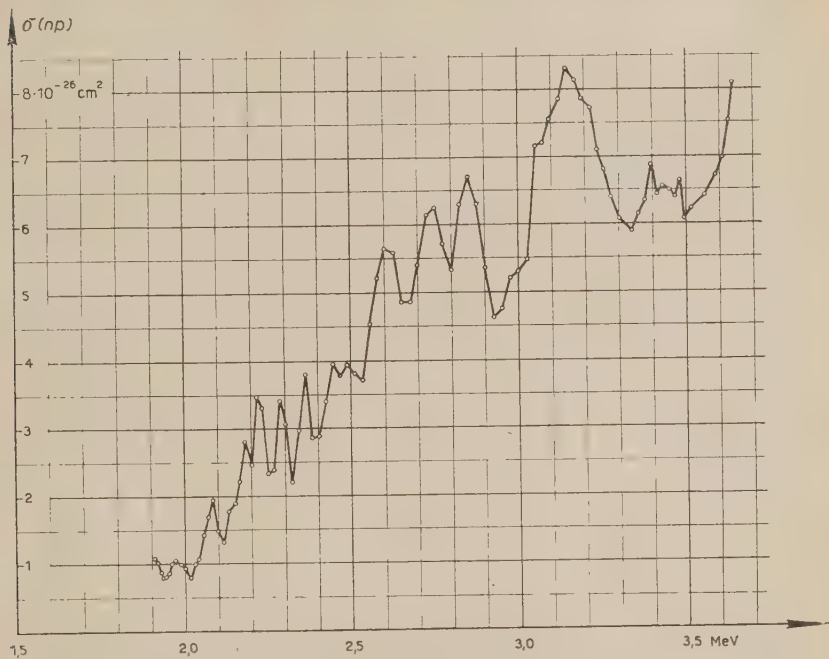


Fig. 6. - Sezione d'urto del processo  $P^{31}(n, p)Si^{31}$  in funzione dell'energia.

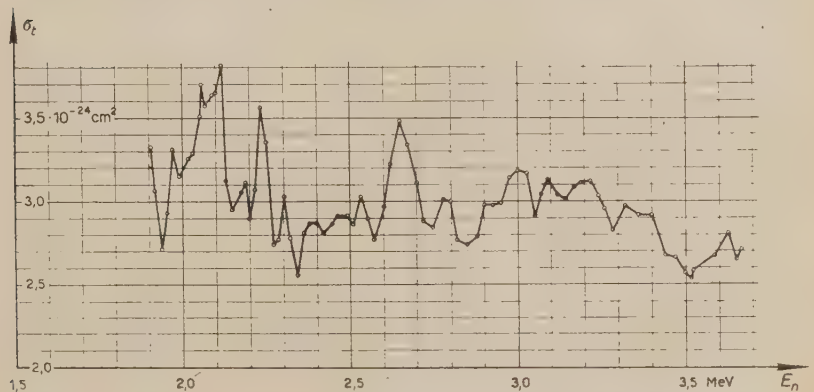


Fig. 7. - Sezione d'urto totale del  $P^{31}$  in funzione dell'energia dei neutroni.

quello di  $r_1$  secondo la successione  $r_1, r_0, r_2, r_1$ . In tale modo per ogni valore di  $E_n$  si ottenevano due valori per  $\mu$  e lo scarto tra di essi esprimeva la bontà della misura.

Con l'intensità di neutroni disponibile, è stato possibile limitare il tempo per la misura di  $r_0, r_1$ , ed  $r_2$  a circa 30 secondi, pur mantenendo l'errore statistico intorno al 0,3%.

L'operazione di misura descritta veniva ripetuta per circa 70 valori di  $\vartheta$  da  $0^\circ$  a  $153^\circ$  in modo che il campo di energia dei neutroni da 2 a 4 MeV risultasse diviso in intervalli di 20-30 keV. Il complesso di tali misure veniva ripetuto per ciascuna sostanza almeno tre volte.

Si ottenevano così le curve  $\mu(\vartheta)$  che, mediate, permettevano di ricavare i valori di  $\mu$  da utilizzare per il calcolo di  $\sigma_t$ , attraverso i passaggi più sopra accennati: correzione per l'assorbimento finito dello stirene, correzioni geometriche, correzioni per eventuali impurità chimiche, ecc. Quest'ultima correzione è stata necessaria per il caso del Fosforo essendosi usato Fosforo rosso in polvere, chimicamente puro, ma legato da una soluzione alcolica di colofonia ( $C_{20}H_{38}O$ , circa  $C_nH_n$ ) in quantità tale che dopo essiccazione la colofonia risultava contenuta al 0,5% in peso.

I risultati delle misure della sezione d'urto totale per lo Zolfo sono dati in fig. 5 e quelli per il Fosforo in fig. 7.

### 3. — Sorgente di neutroni.

Come sorgente di neutroni monocromatici abbiamo usato una targhetta di ghiaccio  $D_2O$  bombardata con deutoni che danno luogo alla reazione:



I deutoni venivano accelerati da una tensione  $E_d$  di 655 kV nell'impianto Tensator di questo Istituto <sup>(15)</sup>. La corrente di deutoni deflessi magneticamente era di  $10 \div 15 \mu A$ . La targhetta di ghiaccio pesante di spessore tale da dare luogo ad una perdita di energia massima di 80 kV per i deutoni incidenti, che corrisponde ad una intensità di neutroni pari a 1/4 della saturazione, era ottenuta per condensazione del vapore di acqua pesante su di un tubo di rame opportunamente sagomato e raffreddato con aria liquida.

I neutroni forniti da tale sorgente hanno energie  $E_n$  diverse a seconda dell'angolo  $\vartheta$  con cui, nel sistema di riferimento del laboratorio, vengono emessi rispetto alla direzione dei deutoni. Il valore di  $E_n$  in funzione di  $\vartheta$  può

<sup>(15)</sup> W. ZÜNTI: *Helv. Phys. Acta*, **19**, 137 (1946).



essere facilmente calcolato; nelle nostre esperienze essendo  $\vartheta$  variabile tra  $0^\circ$  e  $156^\circ$ ,  $E_n$  poteva assumere i valori compresi tra 1,9 e 3,665 MeV.

La sorgente di deutoni era alimentata da una tensione di 60 kV, il che dà luogo ad una indeterminatezza di  $E_n$  dell'ordine di 30 kV, cioè paragonabile a quella dovuta al frenamento dei deutoni nel ghiaccio pesante della tar-ghetta.

L'indeterminatezza di  $E_n$  è però anch'essa funzione di  $\vartheta$  ed il valore sopra dato è quello massimo nelle nostre esperienze. È noto, ad esempio, infatti che a  $110^\circ$  si ha  $dE_n/dE_D = 0$ , per cui i neutroni emessi in tale direzione sono praticamente monocromatici. Il cristallo di antracene del rivelatore d'altra parte era visto dalla sorgente di neutroni sotto un angolo di circa  $2^\circ,5$  mentre  $dE_n/d\vartheta$  raggiunge al massimo i 10 kV/ $1^\circ$ .

La tensione  $E_D$  è stata controllata mediante la soglia delle reazioni ( $p, \alpha\gamma$ ) in  $Li^7$  e  $F^{19}$  accelerando protoni  $H^+$  e ioni  $HH^+$ , contro targhette di  $LiOH$  e  $CaF_2$  rispettivamente. Con i più recenti valori delle soglie  $(^{16})$ ,  $(^{17})$  e  $(^{18})$  la tensione vera è risultata linearmente dipendente da quella misurata, entro 5 keV che è la precisione di lettura del voltmetro da noi usato.

L'intensità dei neutroni forniti dalla reazione  $D, D$  nelle varie direzioni, è stata ricavata introducendo i valori dati da HUNTER e RICHARDS  $(^{19})$  per le costanti di anisotropia nella funzione del tipo  $1 + A \cos^2 \Theta - B \cos^4 \Theta$  per la sezione d'urto differenziale nel sistema di riferimento baricentrico.

#### 4. - Rivelazione dei neutroni.

Per la rivelazione dei neutroni abbiamo usato due apparecchiature gemelle costituite ciascuna da un contatore a scintillazione, un amplificatore a larga banda e di una scala ad alto potere risolutivo.

Il contatore era formato di un cristallo di antracene, realizzato in questo Istituto  $(^{20})$ , a sezione circolare di 2 cm<sup>2</sup> di area e di 2,6 cm di spessore, e da un fotomoltiplicatore tipo 1P21 seguito da un cathodefollower per l'accoppiamento all'amplificatore. Questo, simile al tipo 100, era costituito da due stadi, di tre valvole ciascuno, a reazione negativa, seguiti da un discriminatore e da un cathodefollower di uscita. L'amplificazione realizzata era di 3 000 e la banda

$(^{16})$  T. W. BONNER e J. E. EVANS: *Phys. Rev.*, **73**, 666 (1948).

$(^{17})$  R. G. HERB, S. C. SNOWDON e O. SALA: *Phys. Rev.*, **75**, 246 (1949).

$(^{18})$  A. H. MORRISH: *Phys. Rev.*, **76**, 1651 (1949).

$(^{19})$  G. H. HUNTER e H. T. RICHARDS: *Phys. Rev.*, **76**, 1445 (1949).

$(^{20})$  O. HUBER, F. HUMBEL, H. SCHNEIDER e R. STEFFEN: *Helv. Phys. Acta*, **22**, 418 (1949).

passante da 0,1 a 6 MHz. Gli impulsi amplificati venivano contati da una scala di 1024 con potere risolutivo  $\chi = 10^{-6}$  s.

La scala di 1024 dell'apparecchiatura del Monitor era seguita da una scala di 64. L'impulso uscente da questa comandava un relais che bloccava il funzionamento di entrambe le scale di 1024. La scala della apparecchiatura principale dava quindi direttamente l'intensità  $r_i$  dei neutroni normalizzata al monitor<sup>7</sup> a meno del fattore costante  $64 \cdot 1024$ .

Il rendimento del rivelatore di neutroni da noi usato è risultato del 25% in base ai valori della sezione d'urto differenziale per l'urto D, D e ai dati sperimentali (spessore della targhetta di ghiaccio pesante, intensità della corrente di deutoni, direzione di osservazione). Il confronto della curva sperimentale: intensità dei neutroni in funzione dell'angolo  $\theta$  con quella teorica ha mostrato che tale rendimento è costante a meno del 10% nel campo di energie da noi sperimentato, mentre d'altra parte le eventuali variazioni sono senza effetto in misure di trasmissione.

La precisione nella misura dell'intensità dei neutroni dipende da varie cause di errore che vogliamo qui brevemente analizzare.

La frequenza dei neutroni rivelati nelle nostre esperienze di trasmissione raggiungeva i 2000 neutroni/s: è stato quindi necessario costruire delle scale sufficientemente rapide. Detta infatti  $\nu_0$  la frequenza vera media di eventi casuali e  $\nu$  quella misurata da un dispositivo avente un potere risolutivo  $\chi$ , si ha

$$(23) \quad \nu_0 = \nu \exp [\chi \nu],$$

che per  $\chi \nu \ll 1$  si può scrivere

$$(24) \quad \nu_0 = \nu(1 + \chi \nu).$$

Le scale da noi costruite hanno un potere risolutivo di circa  $10^{-6}$  s, quindi è  $\Delta \nu_0 / \nu_0 = 0,2\%$  per  $\nu = 2000/\text{s}$ .

Il rendimento di un fotomoltiplicatore varia sensibilmente con la tensione di alimentazione. Nell'impiego, da noi fatto delle 1P21 come rivelatori di scintillazione e con il valore della tensione di discriminazione da noi usato, è risultata una variazione del 10% nel numero di impulsi registrati per una variazione dell'1% della tensione di alimentazione (800 ÷ 900 V). Gli alimentatori da noi realizzati<sup>(21)</sup> hanno un fattore di stabilizzazione di 200 cosicchè anche per una variazione del 10% nella tensione di rete si ha una variazione del 0,5% nella tensione continua resa e quindi una variazione del numero di impulsi registrato di 0,5%.

(21) R. RICAMO: *Nuovo Cimento*, **7**, 751 (1950).

L'effetto di zero dei fotomoltiplicatori è assolutamente trascurabile nelle nostre esperienze, essendo esso circa mille volte inferiore all'effetto misurato. Con l'intensità di neutroni disponibile abbiamo osservato un aumento dell'effetto di zero provocato da radioattività indotta nel fotomoltiplicatore e nella sua protezione, causata dalla irradiazione con i neutroni. La vita media di tale attività è risultata di circa 10 m. tuttavia ai nostri fini l'effetto era trascurabile.

Si è sospettato la possibilità di fluttuazioni a breve periodo nel rendimento dei fotomoltiplicatori e si è perciò misurato l'intensità di una sorgente di raggi gamma praticamente costante, con le due apparecchiature gemelle, per 30 volte di seguito; in ciascuna misura venivano registrati  $10^5$  impulsi da entrambe le apparecchiature. Si sono osservati scarti quadratici medi relativi dell'ordine del 0,3% praticamente identici alle fluttuazioni statistiche relative calcolabili dal numero di eventi registrati.

Stabilito che i nostri dispositivi di rivelazione dei neutroni e i sistemi di conteggio avevano una precisione migliore del 0,5%, ci siamo preoccupati di determinare sperimentalmente l'errore nella misura dell'intensità dei neutroni normalizzata al monitor, cioè l'errore in  $r_0$ ,  $r_1$  ed  $r_2$ . A questo scopo abbiamo misurato 30 volte di seguito il valore di  $n_0$  ed  $n_2$  e rispettivamente di  $m_0$  ed  $m_2$  (il caso di  $n_1$  ed  $m_1$  è un caso intermedio) in condizioni normali di funzionamento del sistema di produzione dei neutroni e per due direzioni di osservazione:  $\theta = 0^\circ$  e  $\theta = 90^\circ$ . L'analisi dei risultati ha mostrato scarti quadratici medi relativi in  $n_0$  ed  $m_0$  dell'ordine di  $2 \div 3\%$ , ma soltanto dell'1% in  $r_0$  e così pure per  $n_2$ ,  $m_2$  ed  $r_2$  tanto a  $0^\circ$  che a  $90^\circ$ . Ciò mostra che le fluttuazioni in  $n_0$  ed  $m_0$  e rispettivamente in  $n_2$  ed  $m_2$  in parte notevole si compensano. La distribuzione degli scarti è risultata gaussiana.

In ciascuna misura venivano contati circa  $10^5$  neutroni con un errore statistico relativo dell'ordine del 0,3%. Per la legge di propagazione degli errori ci si doveva attendere quindi in  $r_0$  ed  $r_2$  un errore dell'ordine del 0,5% se questo fosse stato soltanto di natura statistica. L'errore dell'1% stabilito dalle misure si deve perciò attribuire ad altre cause, tra le quali è però da escludere l'inefficienza del sistema di rivelazione dei neutroni, come è dimostrato dalle esperienze con i raggi  $\gamma$ .

Riteniamo che l'unica causa possibile del maggior errore osservato sia l'incostanza della sorgente di neutroni. Questa si può manifestare in vari modi due dei quali interessano al nostro problema: deviazione del raggio di deutroni e variazione della sua intensità. La deviazione del raggio di deutroni comporta un effettivo spostamento della sorgente dei neutroni con conseguente variazione delle distanze tra essa e i cristalli di antracene del rivelatore principale e del monitor senza che si abbia compenso. Con le distanze impiegate è sufficiente uno spostamento di 1 mm da parte della sorgente per dar luogo a variazioni in  $r_i$  dell'ordine dell'1%.

Le fluttuazioni nella direzione e nella intensità del raggio di deutoni, unitamente a variazioni o inomogeneità della targhetta di ghiaccio pesante, hanno per effetto una variazione nell'intensità dei neutroni prodotti sia sulle pareti del tubo di accelerazione dei deutoni e sui numerosi e inevitabili diaframmi, sia nella targhetta di ghiaccio pesante. D'altra parte i neutroni di fondo sono costituiti dai primi e da una frazione di quelli prodotti nella targhetta e che in seguito a diffrazioni arrivano ai rivelatori. Soltanto quest'ultima parte del fondo è però proporzionale all'intensità dei neutroni diretti mentre per giungere alla (10) e alla (14) abbiamo supposto che tutto il fondo lo fosse.

Concludendo, l'errore nella misura dell'intensità relativa dei neutroni è, nelle nostre esperienze, dell'ordine dell'1% imputabile essenzialmente all'incostanza dell'intensità dei neutroni diretti e di fondo. L'uso di un secondo monitor per la misura del fondo e una elaborazione dei dati notevolmente più complessa permetterebbe un miglioramento della precisione della misura, miglioramento di cui però per ora non si vede la necessità.

## 5. - Misura della sezione d'urto nel processo ( $n, p$ ).

Per la nuova misura di  $\sigma(n, p)$  del  $P^{31}$  si è seguita una tecnica analoga a quella recentemente pubblicata (10) migliorando però sensibilmente il potere risolutivo.

Il Fosforo rosso in polvere mescolato con una soluzione alcoolica di colo-

fonia è stato posto su piastrine piane di plexiglas in strato di 4 mm di spessore per una superficie di  $45 \times 40$  mm. Le piastrine dopo essiccazione e levigatura sono state fissate internamente ad un cilindro di cartone bachelizzato di 40 cm di diametro (fig. 8) con il centro nella sorgente di neutroni monocromatici, già usata nelle esperienze di trasmissione. Lo spessore di ghiaccio  $D_2O$  era anche in questo caso pari a un quarto della saturazione.

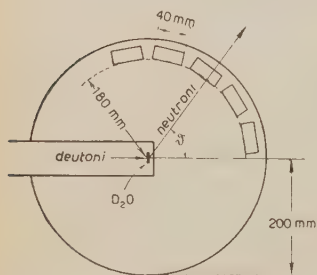


Fig. 8. - Disposizione per l'irraggiamento del  $P^{31}$  con i neutroni.

Il Fosforo veniva quindi irradiato per 4 ore, ottenendosi così una attività  $\beta$  di poco inferiore alla massima ottenibile con la sorgente di neutroni disponibile. Subito dopo

l'attività  $\beta$  veniva misurata contemporaneamente in 4 piastrine diverse mediante 4 contatori G.M..

I contatori presentavano una finestra larga 6 mm, lunga 80, ricoperta di una foglia di Al di potere frenante trascurabile per i  $\beta$  di circa 2 MeV del  $Si^{31}$ .

Le lastrine di Fosforo venivano poste a 0,2 mm dalla finestra del conta-



tore e l'attività veniva misurata per 10 m in ciascuna di 8 posizioni distanti tra di loro 4,8 mm, distanza che corrispondeva ad un angolo  $\vartheta = 10,5$  nell'irraggiamento con i neutroni. L'esplorazione di ciascuna lastrina veniva ripetuta 4 volte per ogni irradiazione e le irradiazioni sono state 4.

L'attività media ottenuta dava luogo con la geometria realizzata per i sistemi di misura, a circa 100 impulsi al minuto in ciascun contatore, perciò ognuno di questi era collegato ad un multivibratore con numeratore anzichè ad una scala. Tuttavia dato il tempo totale di misura, l'errore statistico era inferiore al 2%.

L'attività misurata veniva corretta per le perdite di conteggio, l'effetto di zero e per il decadimento nel tempo.

I dati ottenuti per ciascuna lastrina venivano quindi normalizzati per tener conto del diverso rendimento dei vari contatori e la diversa dose di irradiazione.

La sezione d'urto del processo ( $n, p$ ) veniva poi ottenuta in unità arbitrarie dividendo l'attività normalizzata per il numero di neutroni con cui ciascuna porzione della lastrina di Fosforo era stata irradiata, cioè praticamente per la sezione d'urto differenziale del processo D, D. Il valore assoluto è stato calcolato utilizzando la misura assoluta di METZGER *et al.* <sup>(22)</sup>, quindi ha più che altro valore indicativo.

Il vantaggio essenziale del metodo ora descritto rispetto a quelli precedentemente usati è che il potere risolutivo nelle misure di  $\sigma_t$  e  $\sigma(n, p)$  sono così praticamente identici, come pure la geometria nelle due serie di misure, e restano così presumibilmente esclusi errori sistematici.

Tale precauzione per la misura di ( $n, p$ ) risulta indispensabile ai fini del presente lavoro, solo che si osservi la complessa struttura della curva di fig. 6 specie per le energie da 2 a 2,5 MeV. In tale intervallo di energia le nuove misure hanno permesso di rivelare la presenza di numerose risonanze prima non note.

## 6. — Conclusioni.

Da un esame comparativo delle curve sperimentali per  $\sigma_t$  e  $\sigma(n, p)$  nel caso del  $S^{32}$  (figg. 5 e 6) risulta una soddisfacente coincidenza di molte risonanze fino a circa 3 MeV.

Altrettanto si può affermare per il caso del  $P^{31}$  fino all'energia di 2,5 MeV.

Poichè in entrambe le serie ( $\sigma_t$  e  $\sigma(p, n)$ ) l'energia dei neutroni, cioè la direzione di questi, era definita nel medesimo modo, è da escludersi una causa

<sup>(22)</sup> F. METZGER, F. ALDER e P. HUBER: *Helv. Phys. Acta*, **21**, 278 (1948).

di errore sistematico. Si deve dunque concludere che almeno per le energie più basse l'idea del nucleo intermedio è accettabile.

Alle più alte energie dove la corrispondenza dei massimi viene meno (sembra che per il caso del  $P^{31}$  intervenga uno spostamento nel sistema delle risonanze di  $75 \div 100$  keV) occorrerà introdurre nuove considerazioni se si vorrà ancora conservare l'idea del nucleo intermedio.

L'autore desidera ringraziare il prof. P. SCHERRER per l'ospitalità avuta nell'Istituto da lui diretto, il prof. G. VALLE e la Società Italiana di Fisica per l'appoggio e l'aiuto datigli per il soggiorno a Zurigo, il prof. M. VERDE e il dott. W. ZÜNTI per l'attivo interessamento a questa ricerca.

## APPENDICE

### TRASMISSIONE OTTIMA

#### 1. — Introduzione.

È facile rendersi conto intuitivamente che debba esistere un valore ottimo, ai fini della precisione della misura, per lo spessore da dare al corpo che si vuole impiegare per determinare il coefficiente di assorbimento di una certa sostanza. L'analisi che segue mostra che lo spessore ottimo non è, come spesso si ritiene, quello che corrisponde ad un assorbimento del 50%, in qualunque caso invece conviene usare uno spessore sensibilmente maggiore.

ROSE e SHAPIRO <sup>(23)</sup> si sono in precedenza occupati di questa questione; noi vogliamo qui riprenderla sia per correggere un errore di calcolo rilevabile nel lavoro citato, errore che porta ad un sensibile cambiamento nei risultati, sia per considerare il caso in cui gli errori statistici sono trascurabili e si ha a che fare con errori relativi costanti.

#### 2. — Caso dei soli errori statistici.

Le intensità  $r_0$ ,  $r_1$  ed  $r_2$  già definite nel n. 2, rappresentano anche l'intensità del fascio, a meno di un fattore costante, inessenziale per la nostra trattazione, e che quindi tralasceremo.

Per semplicità supporremo anche che sia  $R = 0$  cosicchè si ha

$$(25) \quad T = \frac{r_1 - r_2}{r_0 - r_2} = \exp [-x],$$

(23) M. E. ROSE e M. M. SHAPIRO: *Phys. Rev.*, **74**, 1853 (1948).

con  $x = n\sigma_t$ , e quindi:

$$(26) \quad \sigma_t = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{T}.$$

Il valore ottimo di  $T$  è quello per il quale l'errore quadratico medio di  $\sigma_t$  è minimo.

Ammettendo trascurabile l'errore in  $n$  si ha dalla (26)

$$(27) \quad \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 \left(\frac{1}{\ln T}\right)^2.$$

Per la legge di propagazione degli errori si ha quindi dalla (25)

$$(28) \quad \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \frac{(\Delta r_1)^2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{\Delta r_0^2}{(r_0 - r_2)^2} + \frac{(r_1 - r_0)^2 (\Delta r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2 (r_0 - r_2)^2},$$

cioè

$$(29) \quad \left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2 = \frac{(\Delta r_1)^2 + (\Delta r_2)^2}{(r_1 - r_2)^2} + \frac{(\Delta r_0)^2 + (\Delta r_2)^2}{(r_0 - r_2)^2} + \frac{(\Delta r_2)^2}{(r_0 - r_2)(r_1 - r_2)}.$$

Il terzo termine del secondo membro della (29) manca nella trattazione di ROSE e SHAPIRO. Tale omissione è arbitraria come ci si può facilmente rendere conto osservando che per  $r_1 \rightarrow r_0$  l'effetto dell'errore in  $r_2$  deve tendere a zero, mentre ciò non avviene se si traslascia il termine anzidetto.

Se con  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  si indica il numero di eventi registrati nei tempi rispettivi  $t_0$ ,  $t_1$  e  $t_2$  si ha:

$$(30) \quad r_i = c_i/t_i, \quad (i = 1, 2, 0)$$

da cui risulta per gli errori, trascurando quelli nei  $t_i$ ,

$$(31) \quad \Delta r_i/r_i = \Delta c_i/c_i.$$

Se ammettiamo che gli errori di conteggio siano dovuti a fluttuazioni statistiche si ha

$$(32) \quad \Delta c_i/c_i = 1/\sqrt{c_i}.$$

Per le (30), (31) e (32) si ha quindi

$$(33) \quad (\Delta r_i)^2 = r_i/t_i.$$

Introducendo con ROSE e SHAPIRO il tempo totale di conteggio

$$(34) \quad \tau = t_0 + t_1 + t_2,$$

i tempi parziali relativi

$$(35) \quad \alpha_i = t_i/\tau,$$

per cui è

$$(36) \quad \sum_i \alpha_i = 1,$$

e il fondo relativo  $m$

$$(37) \quad m = r_2 / (r_0 - r_2),$$

si ha

$$(38) \quad \left( \frac{\Delta\sigma}{\sigma} \right)^2 \tau = \frac{1}{x^2(r_0 - r_2)} \left[ \frac{m+1}{\alpha_0} + \frac{m \exp[2x] + \exp[x]}{\alpha_1} + \frac{m(\exp[2x] + 1 - 2 \exp[x])}{\alpha_2} \right].$$

Con evidente significato dei simboli, la (38) si può scrivere più semplicemente

$$(39) \quad p^2 \tau = \frac{1}{r_0 - r_2} \sum_i f_i^2 / \alpha_i.$$

Qui e nel seguito supporremo  $r_0 - r_2 = \text{cost.}$  Osservando che  $r_0 - r_2$  è l'intensità dei neutroni diretti dalla sorgente al rivelatore, la condizione posta equivale anche ad affermare, se si suppone che il fondo  $r_2$  sia proporzionale all'intensità della sorgente, che il fondo relativo  $m$  è costante nel tempo.

Si tratta ora di trovare il minimo di  $p$  con la condizione ausiliaria (36). A tale scopo è comodo fare uso del noto metodo del moltiplicatore di Lagrange, e si ottiene così

$$(40) \quad \alpha_i = f_i / \sum_i f_i.$$

Sostituendo tale espressione in (39) si ottiene la condizione di minimo per  $x$ :

$$(41) \quad \frac{m \exp[2x]}{f_1} + \exp[x] \left( \frac{1}{2f_1} + x\sqrt{m} \right) - x \sum f_i = 0,$$

che si può scrivere anche

$$(42) \quad \frac{1}{T} \left( \frac{0,5 + m/T}{\sqrt{(m/T^2) + 1/T}} + \sqrt{m} \right) \ln \frac{1}{T} = \sqrt{m+1} + \sqrt{(m/T^2) + 1/T} + \sqrt{m} [(1/T) - 1].$$

La soluzione numerica di questa equazione trascendente ci fornisce  $T_{\text{opt}}$  in funzione di  $m$ . Essa è riportata graficamente in fig. 9 curva a).

Per fondo nullo, cioè per  $m = 0$ , il valore di  $T_{\text{opt}}$  calcolato dalla (42) è  $(T_{\text{opt}})_{m=0} = 0,076$  identico a quello dato in (23) e già calcolato da altri autori (24).

(24) J. RAINWATER e W. W. HAVENS: *Phys. Rev.*, **70**, 146 (1946).



Per  $m = 100$  il valore da noi ottenuto è  $T_{\text{opt}} = 0,37$  anzicchè  $0,30$  come nel lavoro di ROSE e SHAPIRO (fig. 9 curva c)).

La migliore suddivisione del tempo di conteggio per ogni valore di  $m$  si può ottenere sostituendo nelle (40) il corrispondente valore di  $T$  dato dalla (42).

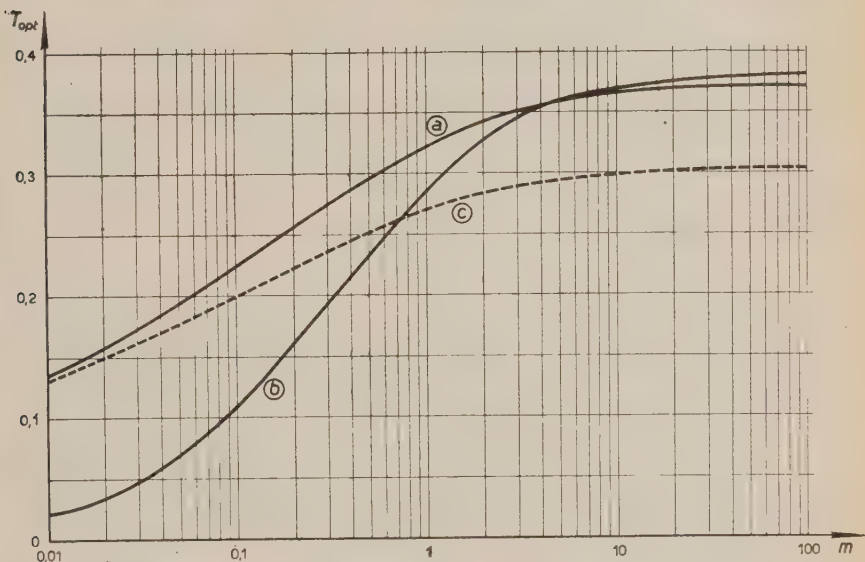


Fig. 9. - Trasmissione ottima in funzione del fondo relativo  $m$ . Curva a) caso di soli errori statistici; curva b) caso di errori relativi uguali e costanti; curva c) caso di soli errori statistici secondo ROSE e SHAPIRO.

### 3. - Caso di errore relativo costante.

Introducendo gli errori relativi

$$(43) \quad \frac{\Delta r_0}{r_0} = k_0, \quad \frac{\Delta r_1}{r_1} = k_1, \quad \frac{\Delta r_2}{r_2} = k_2,$$

si ha per le (27) e (28):

$$(44) \quad \left(\frac{\Delta \sigma}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\ln T}\right)^2 \left[ \left(\frac{r_0}{r_0 - r_2}\right)^2 k_0^2 + \left(\frac{r_1}{r_1 - r_2}\right)^2 k_1^2 + \left(\frac{r_2(r_0 - r_1)}{(r_1 - r_2)(r_0 - r_2)}\right)^2 k_2^2 \right],$$

ed osservando che è  $r_1/(r_1 - r_2) = (T + m)/T$ ;  $r_0/(r_0 - r_2) = 1 + m$ ;  $r_2/(r_0 - r_2) = m$ ;  $(r_0 - r_1)/(r_1 - r_2) = (1 - T)/T$ , la (44) si può scrivere

$$(45) \quad \left(\frac{\Delta \sigma}{\sigma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\ln T}\right)^2 \left[ (1 + m)^2 k_0^2 + \left(1 + \frac{m}{T}\right)^2 k_1^2 + m^2 \left(\frac{1 - T}{T}\right)^2 k_2^2 \right].$$

Nelle nostre esperienze, come si è già detto, gli errori statistici in  $r_0$ ,  $r_1$  e  $r_2$  sono dell'ordine del 0,3%, quindi trascurabili in confronto degli scarti quadratici medi relativi osservati nelle medesime grandezze, errori che sono risultati dell'ordine dell'1%, costanti e indipendenti anche dal fondo relativo  $m$ . In questo caso si ha quindi:  $k_0 = k_1 = k_2 = k$  e la (45) si può scrivere

$$(46) \quad \left(\frac{\Delta\sigma}{\sigma}\right)^2 = 2 \left(\frac{k}{\ln T}\right)^2 \left[1 + m + m^2 + \frac{m^2}{T^2} + \frac{m - m^2}{T}\right].$$

Detta  $\varphi(T)$  l'espressione tra parentesi quadra, e  $\varphi'(T)$  la sua derivata rispetto a  $T$ , la condizione di minimo errore è data da

$$(47) \quad T\varphi'(T) \ln T = \varphi(T),$$

cioè

$$(48) \quad \frac{m^2}{T^2} \left(\ln \frac{1}{T} - 1\right) + \frac{m - m^2}{2T} \left(\ln \frac{1}{T} - 2\right) = 1 + m + m^2.$$

La soluzione numerica della (48) è riportata in fig. 9 (curva  $b$ ). Per valori del fondo relativo  $m$  prossimi a 1 le due curve  $a$ ) e  $b$ ) si discostano poco tra di loro. Per  $m = 0,1$  l'ultima trattazione qui svolta mostra che sono consigliabili trasmissioni dell'ordine di 0,1 anziché dell'ordine di 0,2 come si ottiene nell'ipotesi di soli errori statistici.

Per  $m \rightarrow 0$  la (48) dà come unica soluzione  $T = 0$  che non ha fisicamente senso. È evidente infatti che una limitazione al valore minimo di  $T$  è imposta dal fatto che gli errori statistici crescono sensibilmente al diminuire di  $T$ , cosicchè ad un certo momento essi non sono più trascurabili in confronto agli errori relativi osservati.

## SUMMARY

Total cross sections for  $P^{31}$  and  $S^{32}$  have been measured for neutrons with energy ranging from 1,90 to 3,66 MeV. For the same neutron energies, the cross sections for the  $(n, p)$  reaction have been remeasured for  $P^{31}$  with the  $\beta$ -activation method. Resonances for  $\sigma_i$  and  $\sigma(n, p)$  in  $S^{32}$  occur at the same energies up to 3 MeV. In  $P^{31}$  the position of the resonance coincide very closely up to 2,5 MeV. at higher energies, however, the coincidence ceases. The energy of the neutron in both experiments ( $\sigma_i$  and  $\sigma(n, p)$ ) is rigorously determined in the same way so that no systematic error may occur. One must then conclude that at relatively low energies the experimental data are consistent with the conception of an intermediate nucleus for nuclear reactions. At higher energies a more complicated picture appears to be necessary. Transmission experiments for  $\sigma_i$  determination are discussed in view of the unusual accuracy of the present measurements (1%). The computations of ROSE and SHAPIRO for the optimum absorber thickness were repeated and extended to cover the case in which the statistical errors are negligible and only constant relative errors are present. Neutrons were detected with scintillation counters utilizing anthracene crystals and 1P21 photo-multipliers. The source of monochromatic neutrons was the D.D reaction in heavy ice target, 80 keV thick.

## Sur la Théorie des Perturbations en Mécanique Quantique (II). Spectres continus et Mixtes.

M. SCHÖNBERG

*Centre de Physique Nucléaire de l'Université Libre - Bruxelles*

(ricevuto il 6 Aprile 1951)

**Résumé.** — Les méthodes données dans un travail précédent <sup>(1)</sup>, pour le cas de spectres discrets, sont généralisées pour les cas de spectres continus et mixtes. On considère des systèmes de particules (\*) et des champs quantiques. On montre que la self-energy d'un état du spectre continu n'est pas déterminée par le calcul de perturbations, à cause de l'ambiguïté dans la correspondance entre niveaux perturbés et non perturbés. Une forme modifiée de l'équation de Heitler et Peng est donnée, pour les cas de self-energy. On montre qu'il est possible d'éliminer les termes séculaires dans le développement de l'opérateur unitaire du mouvement.

(\*) Les résultats pour les systèmes de particules ont été exposés au Symposium sur les Mathématiques de l'Electron, réalisé en Avril 1949 à l'Université Libre de Bruxelles.

### Introduction.

1. — Dans la partie précédente de ce travail <sup>(1)</sup>, nous avons étudié la théorie des perturbations pour les systèmes à spectres discrets. Les modifications des méthodes usuelles de Schrödinger et Dirac, que nous avons données, ont l'avantage de permettre le passage direct du traitement stationnaire au traitement non stationnaire, ainsi que de donner des développements sans termes séculaires. Dans ce travail, nous donnerons l'extension de ces méthodes pour des cas plus généraux de spectres mixtes, ainsi que pour des systèmes à spectres continus, en admettant toujours une correspondance entre états perturbés et non perturbés.

(1) M. SCHÖNBERG: *Nuovo Cimento*, **8**, 241 (1951).

Le passage du cas d'un spectre discret à ceux de spectres continus ou mixtes introduit des circonstances essentiellement nouvelles, en changeant profondément la nature de certains opérateurs fondamentaux. Ainsi, l'opérateur  $S_1$ , qui joue un rôle fondamental dans le traitement stationnaire des perturbations, et qui est unitaire dans le cas d'un spectre discret, ne l'est plus dans les cas de spectres continus ou mixtes. Les physiciens ont l'habitude de traiter le cas d'un spectre continu comme la limite de celui d'un spectre discret, sans se préoccuper assez de certaines différences fondamentales, ce qui peut conduire à des erreurs graves, surtout dans le cas de systèmes de champs en interaction. Nos méthodes sont particulièrement convenables pour traiter des spectres continus ou mixtes et conduisent d'une façon très simple à la théorie du damping de HEITLER et PENG <sup>(2)</sup>, GORA <sup>(3)</sup>, WILSON <sup>(4)</sup> et SOKOLOV <sup>(5)</sup>, ainsi qu'à la théorie de la matrice caractéristique de HEISENBERG <sup>(6)</sup> et à certains résultats de la théorie des collisions de SCHWINGER <sup>(7)</sup>. Dans le cas de spectres mixtes, nos méthodes donnent des résultats un peu plus généraux que celles employées par ces auteurs et tiennent compte des déplacements des niveaux discrets. La possibilité de passer directement du traitement stationnaire au traitement non stationnaire nous permet d'obtenir très facilement les conditions qui caractérisent les fonctions d'onde pour les problèmes de collisions, dans des cas très généraux. L'introduction des opérateurs de projection pour les niveaux du spectre continu donne la description mathématique naturelle des couches d'états de même énergie, qui interviennent dans la théorie des collisions.

Dans la première partie de ce travail, nous faisons correspondre à chaque état du spectre continu non perturbé un état perturbé de même énergie, comme l'on fait d'habitude dans la théorie ordinaire des collisions. Dans la seconde partie, nous faisons correspondre à chaque état non perturbé un état perturbé d'énergie différente, en général, de façon à tenir compte des corrections de self-energy. Cela n'offre pas de difficultés pour les états du spectre discret, mais pour ceux du spectre continu la correspondance avec le spectre non perturbé peut être établie d'une infinité de façons différentes, et les self-energies des états du spectre continu ne seront déterminées que si l'on introduit un criterium restrictif spécial. Chaque façon différente d'établir la correspondance entre états perturbés et non perturbés est associée de façon univoque à une

(<sup>2</sup>) W. HEITLER et H. W. PENG: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **38**, 296 (1942); W. HEITLER: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **38**, 291 (1941).

(<sup>3</sup>) E. GORA: *Zeits. f. Phys.*, **120**, 121 (1943).

(<sup>4</sup>) A. H. WILSON: *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **37**, 301 (1941).

(<sup>5</sup>) A. SOKOLOV: *Journ. of Phys. U.S.S.R.*, **5**, 231 (1941).

(<sup>6</sup>) W. HEISENBERG: *Zeits. f. Phys.*, **120**, 513 et 673 (1943); *Zeits. f. Naturforsch.*, **1**, 608 (1946).

(<sup>7</sup>) J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948).



décomposition corrélatrice de la hamiltonienne du système perturbé. Les méthodes de calcul des self-energies employées jusqu'à présent se basent essentiellement sur la décomposition de la hamiltonienne perturbée en celle des champs sans interaction (hamiltonienne non perturbée) et en hamiltonienne d'interaction (perturbation) (\*). Cette décomposition correspond à prendre des états correspondants de même énergie sur les spectres continus perturbés et non perturbés, et elle doit conduire à une self-energy nulle pour l'électron libre dans un calcul de perturbations cohérent, basé sur une telle correspondance. Ce fait n'apparaît pas clairement dans les calculs de la self-energy, à cause des divergences qui apparaissent dans les développements en série employés (développements en série de puissances d'une constante de couplage).

Nos méthodes conduisent à une modification de l'équation de HEITLER et PENG (2) lorsqu'il y a self-energy, la couche d'états intervenant dans la collision étant celle des énergies perturbées et non plus celle des énergies non perturbées. Cette équation de HEITLER et PENG modifiée ne coïncide cependant pas avec celle proposée par HEITLER et MA (3), qui ont cherché à généraliser la transformation de BLOCH et NORDSIECK (10). Nous ne discuterons pas la généralisation de la transformation de BLOCH et NORDSIECK dans ce travail, mais nous la considérerons dans un travail suivant.

Dans l'étude des spectres discrets (1), nous avons montré qu'il est possible de modifier le développement de l'opérateur unitaire du mouvement de façon à en éliminer les termes séculaires. Nous obtenons un résultat équivalent pour les spectres continus, dans ce travail, quelle que soit la façon de faire correspondre les niveaux continus perturbés et non perturbés, au moyen d'identités déduites du traitement stationnaire des perturbations, c'est à dire, par une méthode analogue à celle employée pour les spectres discrets. Il est intéressant de remarquer que les identités que nous permettent d'éliminer les termes séculaires, en prenant la somme de contributions venant d'approximations différentes, correspondent aux équations qui déterminent les déplacements des niveaux discrets par la perturbation. En particulier, quand on décompose la hamiltonienne du système en hamiltonienne non perturbée et en perturbation, ces identités expriment que les déplacements des niveaux du spectre continu

---

(\*) Dans certains travaux récents sur la théorie des champs, on a employé des décompositions un peu différentes. Ainsi, DYSON (8) ajoute un terme correctif à l'interaction pour tenir compte du fait que la masse observable de l'électron contient déjà la self-energy de l'électron libre en repos, c'est à dire la masse électromagnétique. L'introduction d'une telle correction n'est pas nécessaire, lorsqu'on fait correspondre des états de même énergie sur les parties continues des spectres perturbés et non perturbés.

(8) F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 et 1736 (1949).

(9) W. HEITLER et S. T. MA: *Phil. Mag.*, **11**, 651 (1949).

(10) F. BLOCH et A. NORDSIECK: *Phys. Rev.*, **52**, 54 (1937).

sont nuls, ce dont on ne tient pas compte dans les développements en série de l'opérateur unitaire du mouvement de la méthode de la variation des constantes de Dirac et dans ceux de la théorie de FEYNMAN <sup>(11)</sup> et DYSON <sup>(8)</sup>.

Récemment FERRETTI <sup>(12)</sup> a développé une théorie de perturbations quantiques dont plusieurs résultats sont équivalents à quelques uns de ceux de notre travail précédent <sup>(1)</sup> et de la première partie de ce travail. Le point de départ de FERRETTI est le traitement dynamique des perturbations de la méthode de la variation des constantes, associé à une méthode spéciale de variation adiabatique de l'interaction. Nos développements dynamiques, basés sur une transformation de contact un peu différente de celle de la méthode de la variation des constantes, se rattachent directement au traitement stationnaire et permettent d'éviter l'emploi d'une interaction variant adiabatiquement.

## PREMIÈRE PARTIE

### PERTURBATIONS DE SYSTÈMES SANS SELF-ENERGY

2.— Nous considérerons des systèmes dynamiques dont la hamiltonienne  $H$  est un polynôme ou série de puissances d'un paramètre réel  $\lambda$  petit par rapport à 1

$$(1) \quad H = H_0 + H_p, \quad H_p = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n H_n, \quad \lambda \ll 1.$$

$H_0$  est la hamiltonienne non perturbée et  $H_p$  est la perturbation. Dans la partie déjà publiée de ce travail <sup>(1)</sup>, nous avons admis que les spectres de  $H$  et  $H_0$  étaient discrets; maintenant nous leverons cette restriction, mais nous admettrons la possibilité d'établir une correspondance entre les niveaux discrets de  $H$  et ceux de  $H_0$ , de façon à avoir

$$(2) \quad E_i^{(0)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} E_i, \quad \Phi_i^{(0)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \Phi_i,$$

les  $E_i$  et  $E_i^{(0)}$  étant des valeurs propres correspondantes de  $H$  et  $H_0$  et les  $\Phi_i$  et  $\Phi_i^{(0)}$  les fonctions propres respectives

$$(3) \quad H\Phi_i = E_i\Phi_i, \quad H_0\Phi_i^{(0)} = E_i^{(0)}\Phi_i^{(0)}.$$

Nous admettrons que les valeurs propres des spectres continus de  $H$  et  $H_0$  ont une dégénérescence infinie et que les différentes fonctions propres du même niveau peuvent être numérotées par des paramètres  $\theta$ , tant pour  $H_0$  comme

<sup>(11)</sup> R. P. FEYNMAN: *Phys. Rev.*, **76**, 584 et 749 (1949).

<sup>(12)</sup> B. FERRETTI: *Nuovo Cimento*, **8**, 108 (1951).

pour  $H$

$$(4) \quad H\Phi_{E,\theta} = E\Phi_{E,\theta}, \quad H_0\Phi_{E,\theta}^{(0)} = E\Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Les spectres continus de  $H$  et  $H_0$  seront pris coïncidants et nous établirons la correspondance

$$(2a) \quad \Phi_{E,\theta}^{(0)} \rightarrow \Phi_{E,\theta}.$$

Nous prendrons toutes les fonctions propres normées

$$(5) \quad \begin{cases} (\Phi_i, \Phi_{i'}) = \delta_{ii'}, & (\Phi_{E,\theta}, \Phi_{E',\theta'}) = \delta(E - E')\delta(\theta - \theta'), & (\Phi_i, \Phi_{E,\theta}) = 0 \\ (\Phi_i^{(0)}, \Phi_{i'}^{(0)}) = \delta_{ii'}, & (\Phi_{E,\theta}^{(0)}, \Phi_{E',\theta'}^{(0)}) = \delta(E - E')\delta(\theta - \theta'), & (\Phi_i^{(0)}, \Phi_{E,\theta}^{(0)}) = 0 \end{cases}.$$

Nous utiliserons une décomposition de  $H$  semblable à celle du spectre discret

$$(6) \quad H = J + I;$$

$J$  étant défini par les équations suivantes

$$(7) \quad J\Phi_i^{(0)} = E_i\Phi_i^{(0)}, \quad J\Phi_{E,\theta}^{(0)} = E\Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Nous admettrons toujours qu'il n'y a pas des points communs aux parties continues et discrètes des spectres perturbés et non perturbés.

Les décompositions spectrales de  $H$ ,  $H_0$  et  $J$  sont

$$(8a) \quad H = \sum_i E_i P_i + \int E P_{E,\theta} dE d\theta,$$

$$(8b) \quad H_0 = \sum_i E_i^{(0)} P_i^{(0)} + \int E P_{E,\theta}^{(0)} dE d\theta,$$

$$(8c) \quad J = \sum_i E_i P_i^{(0)} + \int E P_{E,\theta}^{(0)} dE d\theta,$$

les opérateurs de projection étant définis de la façon usuelle

$$(9) \quad \begin{cases} P_i \psi = \Phi_i(\Phi_i, \psi), & P_{E,\theta} \psi = \Phi_{E,\theta}(\Phi_{E,\theta}, \psi), \\ P_i^{(0)} \psi = \Phi_i^{(0)}(\Phi_i^{(0)}, \psi), & P_{E,\theta}^{(0)} \psi = \Phi_{E,\theta}^{(0)}(\Phi_{E,\theta}^{(0)}, \psi). \end{cases}$$

Nous avons

$$(10) \quad P_i^{(0)} P_{i'}^{(0)} = \delta_{ii'} P_i^{(0)}, \quad P_i^{(0)} P_{E,\theta}^{(0)} = 0, \quad P_{E,\theta}^{(0)} P_{E',\theta'}^{(0)} = \delta(E - E')\delta(\theta - \theta').$$

$$(11) \quad \sum_i P_i^{(0)} + \int P_{E,\theta}^{(0)} dE d\theta = 1.$$

Nous utiliserons aussi les opérateurs dyadiques  $P_{i,i'}^{(0)}$ ,  $P_{i,E;\theta}^{(0)}$ ,  $P_{E,\theta;i}^{(0)}$ ,  $P_{E;\theta;E',\theta'}^{(0)}$

$$(12) \quad \begin{cases} P_{i,i'}^{(0)} \psi = \Phi_i^{(0)}(\Phi_{i'}^{(0)}, \psi), & P_{i,E;\theta}^{(0)} \psi = \Phi_i^{(0)}(\Phi_{E,\theta}^{(0)}, \psi) \\ P_{E,\theta;i}^{(0)} \psi = \Phi_{E,\theta}^{(0)}(\Phi_i^{(0)}, \psi), & P_{E,\theta;E',\theta'}^{(0)} \psi = \Phi_{E,\theta}^{(0)}(\Phi_{E',\theta'}^{(0)}, \psi). \end{cases}$$

Il résulte de (12) que

$$(13) \quad \begin{cases} P_{i,l'}^{(0)} P_{i'',l''}^{(0)} = \delta_{l',l''} P_{i,l''}^{(0)}, & P_{l;E,\theta}^{(0)} P_{E',\theta';l'}^{(0)} = \delta(E-E') \delta(\theta-\theta') P_{l,l'}^{(0)}, \\ P_{E,\theta;l}^{(0)} P_{E',\theta';E'',\theta''}^{(0)} = P_{E,\theta;E'',\theta''}^{(0)} \delta(E'-E'') \delta(\theta'-\theta''). \end{cases}$$

Un opérateur quelconque  $A$  peut être décomposé en dyadiques

$$(14) \quad \begin{cases} A = \sum_{l,l'} P_{i,l'}^{(0)} \langle l | A | l' \rangle + \sum_l \int P_{l;E,\theta}^{(0)} \langle l | A | E, \theta \rangle dE d\theta + \\ + \sum_l \int P_{E,\theta;l}^{(0)} \langle E, \theta | A | l \rangle dE d\theta + \iint P_{E,\theta;E',\theta'}^{(0)} \langle E, \theta | A | E', \theta' \rangle dE d\theta dE' d\theta' \end{cases}$$

les  $\langle l | A | \rangle$  étant les éléments de matrice de  $A$  dans la représentation de  $H_0$  et des  $\theta$ .

Il est utile de considérer les opérateurs totaux de projection d'un niveau  $E$

$$(15) \quad P_E = \int P_{E,\theta} d\theta, \quad P_E^{(0)} = \int P_{E,\theta}^{(0)} d\theta.$$

Les fonctions  $F(J)$  ont la décomposition spectrale suivante

$$(16) \quad F(J) = \sum F(E_l) P_l^{(0)} + \int F(E) P_E^{(0)} dE,$$

parce que

$$(17) \quad P_E^{(0)} P_{E'}^{(0)} = \delta(E-E') P_E^{(0)}, \quad P_l^{(0)} P_E^{(0)} = 0.$$

La décomposition spectrale de  $H$  se ramène à la solution de l'équation

$$(18) \quad HS = SJ,$$

parce que les  $S$  transforment les fonctions propres de  $H_0$  en fonctions propres de  $H$

$$(19) \quad \begin{cases} H(S\Phi_l^{(0)}) = S(J\Phi_l^{(0)}) = E_l(S\Phi_l^{(0)}), \\ H(S\Phi_{E,\theta}^{(0)}) = S(J\Phi_{E,\theta}^{(0)}) = E(S\Phi_{E,\theta}^{(0)}). \end{cases}$$

Nous pouvons remplacer (18) par le système d'équations

$$(20) \quad HSP_l^{(0)} = E_l SP_l^{(0)}, \quad HSP_E^{(0)} = E SP_E^{(0)},$$

qui peuvent être mises sous la forme

$$(21) \quad (J - E_l) SP_l^{(0)} = -ISP_l^{(0)}, \quad (J - E) SP_E^{(0)} = -ISP_E^{(0)}.$$



Pour résoudre le système (21) nous introduirons l'opérateur  $K(u)$

$$(22) \quad K(u) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(J - u)\tau] \varepsilon(\tau) d\tau,$$

$$(23) \quad \varepsilon(\tau) = \frac{\tau}{|\tau|},$$

$u$  étant un nombre. En tenant compte de (16), on voit facilement que

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} K(u) = (u - J)^{-1} \quad (u \text{ n'appartenant pas au spectre de } J), \\ K(E_l) = \sum_{l' \neq l} P_{l'}^{(0)} (E_l - E_{l'})^{-1} + \int P_E^{(0)} (E_l - E')^{-1} dE', \\ K(E) = \sum_l P_l^{(0)} (E - E_l)^{-1} + \text{v.p.} \int P_E^{(0)} (E - E')^{-1} dE', \end{array} \right.$$

v.p. indiquant la valeur principale de l'intégrale.

Nous obtenons de la deuxième équation (24) la relation suivante

$$(25) \quad K(E_l)(J - E_l) = -1 + P_l^{(0)}.$$

D'autre part, il résulte de (22) que

$$(26) \quad K(E)(J - E) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau} \{ \exp [i(J - E)\tau] \} \varepsilon(\tau) d\tau = \\ = -1 + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos [(J - E)\tau].$$

En tenant compte de (25) et (26), nous obtenons de (21)

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} SP_l^{(0)} = P_l^{(0)} SP_l^{(0)} + K(E_l) ISP_l^{(0)}, \\ SP_E^{(0)} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos [(J - E)\tau] SP_E^{(0)} + K(E) ISP_E^{(0)}, \end{array} \right.$$

done

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} SP_l^{(0)} = [1 - K(E_l)I]^{-1} P_l^{(0)} SP_l^{(0)}, \\ SP_E^{(0)} = [1 - K(E)I]^{-1} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos [(J - E)\tau] SP_E^{(0)}, \end{array} \right.$$

et la solution générale de (18) est

$$(29) \quad S = \sum_l [1 - K(E_l)I]^{-1} P_l^{(0)} SP_l^{(0)} + \\ + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dE [1 - K(E)I]^{-1} \cos [(J - E)\tau] SP_E^{(0)} \quad (13).$$

(13) Dans les équations précédentes l'opération  $\lim_{\tau \rightarrow \infty}$  est une limite généralisée, pour laquelle  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \exp [ia\tau] = 0$  (voir HARDY: *Divergent series*, Oxford, 1949), pg. 12.

Nous définirons maintenant la partie diagonale  $A_d$  d'un opérateur  $A$

$$(30) \quad A_d = \sum_{l'} P_{l'}^{(0)} A P_{l'}^{(0)} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \cos [(J - E')\tau] A P_{E'}^{(0)} dE' = \\ = \sum_{l'} P_{l'}^{(0)} A P_{l'}^{(0)} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \iint \cos [(E - E')\tau] P_E^{(0)} A P_{E'}^{(0)} dE dE'.$$

$A_d$  commute avec les  $P_l^{(0)}$ , mais ne commute pas nécessairement avec les  $P_E^{(0)}$

$$(31) \quad [A_d, P_l^{(0)}] = 0, \quad [A_d, P_E^{(0)}] \neq 0.$$

Nous pouvons mettre (29) sous la forme suivante

$$(32) \quad S = \left\{ \sum_l [1 - K(E_l)I]^{-1} P_l^{(0)} + \int dE [1 - K(E)I]^{-1} P_E^{(0)} \right\} S_d.$$

Cette équation montre que  $S$  est déterminé par sa partie diagonale. Nous pouvons obtenir de (32) un développement de  $S$  en série de puissances de  $I$ , au moyen de la formule bien connue

$$(33) \quad [1 - K(u)I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [K(u)I]^n.$$

Le développement ainsi obtenu est tout à fait analogue à celui que nous avons donné dans la partie précédente de ce travail <sup>(1)</sup> (spectres discrets). Pour déterminer les niveaux discrets de  $H$  nous avons les équations

$$(34) \quad \langle l | IS | l \rangle = 0,$$

qui résultent de (21). Nous avons, comme dans le cas d'un spectre discret pur

$$(35) \quad E_l = E_l^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l | I [K(E_l)I]^n | l \rangle.$$

Les équations (34) sont une conséquence de la relation suivante, lorsque  $S_d$  commute avec  $J$

$$(36) \quad (IS)_d = 0, \quad ([S_d, J] = 0).$$

Il est important de remarquer qu'en général

$$(36a) \quad \langle E, \theta' | IS | E, \theta'' \rangle \neq 0.$$

On vérifie facilement que

$$(37) \quad A_d = \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \infty} [\exp[iJ\tau] A \exp[-iJ\tau] + \exp[-iJ\tau] A \exp[iJ\tau]].$$

Puisque

$$\begin{aligned}
 (38) \quad & \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iJ\tau] [A, J] \exp [-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau = \\
 & = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{d\tau} [\exp [iJ\tau] A \exp [-iJ\tau]] \varepsilon(\tau) d\tau = \\
 & = A - \frac{1}{2} \lim_{\tau \rightarrow \pm\infty} [\exp [iJ\tau] A \exp [-iJ\tau] + \exp [-iJ\tau] A \exp [iJ\tau]],
 \end{aligned}$$

nous avons

$$(39) \quad A = A_d + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iJ\tau] [A, J] \exp [-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Cette formule et l'équation (18) nous donnent une équation intégrale pour  $S$

$$(40) \quad S = S_d + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iJ\tau] I S \exp [-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau.$$

La solution de (40) est

$$\begin{aligned}
 (41) \quad S = & \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{i}{2} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_1) \varepsilon(\tau_1) d\tau_1 \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_2) \varepsilon(\tau_2 - \tau_1) d\tau_2 \dots \right. \\
 & \left. \times \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_n) \varepsilon(\tau_n - \tau_{n-1}) d\tau_n \right] S_d,
 \end{aligned}$$

avec

$$(42) \quad I'(\tau) = \exp [iJ\tau] I \exp [-iJ\tau].$$

En prenant les nouvelles variables d'intégration  $t_r$

$$(43) \quad t_r = \tau_r - \tau_{r-1}, \quad (\tau_0 = 0)$$

et en tenant compte de l'identité

$$(44) \quad I'(\tau_n) = \exp [iJ\tau_n] I \left[ \sum_t P_t^{(0)} \exp [-iE_t\tau_n] + \int dE P_E^{(0)} \exp \{-iE\tau_n\} \right],$$

on trouve que

$$(45) \quad S = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_l \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(J - E_l)t] \varepsilon(t) dt I \right\}^n P_l^{(0)} + \right. \right. \\ \left. \left. + \int dE \left\{ \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(J - E)t] \varepsilon(t) dt I \right\}^n P_E^{(0)} \right] \right\} S_d,$$

donc

$$(46) \quad S = \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \sum_l \{ K(E_l) I \}^n P_l^{(0)} + \int dE \{ K(E) I \}^n P_E^{(0)} \right] \right\} S_d.$$

Ce développement coïncide avec celui que l'on obtient de (32) et (33).

Dans le cas du spectre discret, il suffit de prendre  $S_d = 1$  pour avoir un opérateur unitaire. Dans le cas plus général que nous considérons maintenant, il n'en est plus de même. Nous verrons plus tard que l'on peut obtenir un  $S$  unitaire en choisissant  $S_d$  de façon à satisfaire les conditions qui caractérisent les fonctions d'onde des problèmes de diffusion.

### L'opérateur $S$ pour la diffusion.

3. — La fonction d'onde  $\psi(t)$ , qui décrit le mouvement du système perturbé, satisfait à l'équation de Schrödinger

$$(47) \quad i \frac{d}{dt} \psi(t) = H \psi(t), \quad (\hbar = 1).$$

Nous avons

$$(48) \quad \psi(t) = V(t - t_0) \psi(t_0), \quad (V(t) = \exp [-iHt])$$

l'opérateur  $V(t)$  étant déterminé par les équations

$$(49) \quad i \frac{d}{dt} V(t) = H V(t), \quad V(0) = 1.$$

Nous introduirons maintenant l'opérateur  $U(t, t_0)$

$$(50) \quad U(t, t_0) = \exp [iJt] V(t - t_0) \exp [-iJt_0] = \\ = (\exp [iJt] \exp [-iHt]) (\exp [iJt_0] \exp [-iJt_0]),$$



$U(t, t_0)$  est déterminé par les équations

$$(51) \quad i \frac{d}{dt} U(t, t_0) = I'(t) U(t, t_0), \quad U(t_0, t_0) = 1,$$

qui sont équivalentes à l'équation intégrale

$$(52) \quad U(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t I'(\tau) U(\tau, t_0) d\tau.$$

En particulier, nous avons

$$(53) \quad U(t, -\infty) = 1 - i \int_{-\infty}^t I'(\tau) U(\tau, -\infty) d\tau.$$

Cette équation est satisfaite en prenant

$$(54) \quad U(t, -\infty) = \exp[iJt] S_+ \exp[-iJt], \quad \frac{d}{dt} S_+ = 0,$$

$S_+$  étant la solution de l'équation

$$(55) \quad S_+ = 1 - i \int_{-\infty}^0 \exp[iJ\tau] I S_+ \exp[-iJ\tau] d\tau.$$

En effet il résulte de (55) que

$$(56) \quad \begin{aligned} \exp[iJt] S_+ \exp[-iJt] &= 1 - i \int_{-\infty}^t \exp[iJ\tau'] I S_+ \exp[-iJ\tau'] d\tau' = \\ &= 1 - i \int_{-\infty}^t I'(\tau') (\exp[iJ\tau'] S_+ \exp[-iJ\tau']) d\tau' \quad (\tau' = \tau + t). \end{aligned}$$

Il résulte de (50) que

$$(57) \quad \begin{aligned} S_+ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \} = \\ &= \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \{ \exp[iHt_0] \exp[-iJt_0] \}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'identité suivante

$$(58) \quad \begin{aligned} H \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \} - \\ - \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \} J = \\ = i \frac{d}{dt} \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \}, \end{aligned}$$

et de (57), nous obtenons

$$(59) \quad HS_+ - S_+J = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} i \frac{d}{dt} \{ \exp[-iH(t-t_0)] \exp[iJ(t-t_0)] \} = 0.$$

$S_+$  est donc un opérateur  $S$ .  $S_+$  est unitaire parce que  $U(t, t_0)$  est unitaire

$$(60) \quad S_+ = U(0, -\infty), \quad S_+^\dagger = U(-\infty, 0) = S_+^{-1}.$$

Considérons maintenant l'opérateur  $S$  dont la partie diagonale est 1 et représentons le par  $S_1$ . L'opérateur  $S_1'(t)$

$$(61) \quad S_1'(t) = \exp[iJt]S_1 \exp[-iJt], \quad ((S_1)_d = 1),$$

satisfait à l'équation intégrale suivante

$$(62) \quad S_1'(t) = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau,$$

qui n'est au fond qu'un cas particulier de (40). Dans le cas d'un spectre continu pur, cette équation coïncide avec une équation qui joue un rôle important dans la théorie des collisions de SCHWINGER (7), où elle est introduite d'une façon différente, sans relations avec un traitement stationnaire.  $S_1'(t)$  satisfait à la même équation différentielle que  $U(t, t_0)$

$$(63) \quad i \frac{d}{dt} S_1'(t) = I_1'(t) S_1'(t).$$

Il y a donc un opérateur constant  $R$ , tel que

$$(64) \quad U(t, -\infty) = S_1'(t)R.$$

En particulier nous avons

$$(65) \quad U(-\infty, -\infty) = 1 = S_1'(-\infty)R,$$

donc

$$(66) \quad R = [S_1'(-\infty)]^{-1} = \left[ 1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) d\tau \right]^{-1}.$$

On voit facilement que

$$(67) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) S_1'(\tau) d\tau = 2\pi \int dE P_E^{(0)} i S_1 P_E^{(0)}.$$

Il résulte de (67) que

$$(68) \quad [S'_1(-\infty), J] = 0, \quad [R, J] = 0.$$

Puisque  $R$  commute avec  $J$  et

$$(69) \quad S_+ = S_1 R,$$

nous avons une nouvelle preuve que  $S_+$  est une solution de l'équation (18).

Il résulte de (66) que

$$(70) \quad R = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) U(\tau, -\infty) d\tau = \frac{1}{2} [1 + U(\infty, -\infty)],$$

la condition initiale pour  $S'_1(t)$  est donc

$$(71) \quad S'_1(-\infty) = 2[1 + U(\infty, -\infty)]^{-1}.$$

$S_+$  est l'opérateur  $S$  qui correspond à la diffusion. En effet, considérons la solution  $\psi_{E,\theta}(t, t_0)$  de l'équation de Schrödinger

$$(72) \quad \psi_{E,\theta}(t, t_0) = V(t - t_0) \exp[-iEt_0] \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \exp[-iJt] U(t, t_0) \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Lorsque  $t_0$  tend vers  $-\infty$ ,  $\psi_{E,\theta}(t, t_0)$  tend vers une solution stationnaire  $\psi_{E,\theta}(t)$

$$(73) \quad \psi_{E,\theta}(t) = S_+ \exp[-iJt] \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \exp[-iEt] S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)},$$

$\psi_{E,\theta}(t)$  représentera l'état du système pendant la collision, si  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  représente les particules libres incidentes. L'équation intégrale (55) peut être mise sous la forme

$$(74) \quad S_+ = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iJ\tau] I S_+ \exp[-iJ\tau] d\tau + \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[iJ\tau] I S_+ \exp[-iJ\tau] \varepsilon(\tau) d\tau,$$

done

$$(75) \quad S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(J - E)\tau] d\tau I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} + \\ + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i(J - E)\tau] \varepsilon(\tau) d\tau I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

En tenant compte de la décomposition spectrale de  $\exp[iJ\tau]$ , ainsi que de (22).

nous obtenons

$$(76) \quad S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - [i\pi P_E^{(0)} - K(E)] I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

La formule (16) montre que l'opérateur  $\delta(J - E)$  existe effectivement,  $\delta$  étant la fonction symbolique de Dirac

$$(77) \quad P_E^{(0)} = \delta(J - E).$$

D'autre part, il est justifié d'écrire

$$(78) \quad K(E) = \text{v.p. } (E - J)^{-1},$$

done

$$(79) \quad S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - [i\pi \delta(J - E) + \text{v.p. } (J - E)^{-1}] I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

L'équation (79) donne la fonction d'onde perturbée  $\Phi_{E,\theta}$  comme somme de la fonction d'onde non perturbée (ondes incidentes) et de celle des ondes diffusées. L'opérateur appliqué à  $I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  est une généralisation de celui considéré par DIRAC <sup>(14)</sup> et HEISENBERG <sup>(6)</sup> dans la théorie des collisions. Le rapprochement des traitements stationnaire et non stationnaire nous a permis de justifier rigoureusement le choix de cet opérateur, qui caractérise d'une façon générale les ondes divergentes, et qui usuellement est pris par des considérations d'analogie avec le cas de la diffusion d'une particule par un champ de forces.

Nous choisirons en général

$$(80) \quad \Phi_i = S_+ \Phi_i^{(0)}, \quad \Phi_{E,\theta} = S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)},$$

et nous introduirons la notation

$$(81) \quad (J - E)_{\pm}^{-1} = \text{v.p. } (J - E)^{-1} \pm i\pi \delta(J - E),$$

$(J - E)_+^{-1}$  n'est pas l'inverse de  $J - E$  puisque

$$(82) \quad (J - E)_+^{-1} (J - E) = -K(E) (J - E) \neq 1.$$

L'équation (79) peut être écrite sous la forme suivante

$$(83) \quad \Phi_{E,\theta} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - (J - E)_+^{-1} I \Phi_{E,\theta}.$$

#### L'équation de Heitler et Peng.

4. - L'équation (83) détermine la fonction d'onde perturbée qui satisfait aux conditions de la diffusion. Dans la théorie quantique de l'amortissement (damping), on utilise une équation intégrale qui se rattache étroitement à (83).

<sup>(14)</sup> P. A. M. DIRAC: *Principles of Quantum Mechanics* (Oxford, 1935).



Cette équation a été donnée, dans des cas particuliers, par plusieurs auteurs <sup>(2,3,4,5)</sup> et, dans le cas général d'un spectre continu, par HEITLER et PENG <sup>(2)</sup>. HEITLER et PENG ont utilisé une méthode non stationnaire; nous employerons d'abord la méthode stationnaire d'itération due à GORA <sup>(3)</sup> et perfectionnée par PAULI <sup>(15)</sup>, pour obtenir une généralisation de l'équation de HEITLER et PENG et, ensuite, nous montrerons que la méthode d'itération peut être remplacée par un traitement plus simple et direct. Prenons (83) sous la forme suivante

$$(84) \quad \Phi_{E,\theta} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - i\pi P_E^{(0)} I \Phi_{E,\theta} + K(E) I \Phi_{E,\theta},$$

et remplaçons dans le dernier terme de (84)  $\Phi_{E,\theta}$  par le second membre de (84)

$$(85a) \quad \Phi_{E,\theta} = \{1 + K(E)I\} \Phi_{E,\theta}^{(0)} - i\pi \{1 + K(E)I\} P_E^{(0)} I \Phi_{E,\theta} + [K(E)I]^2 \Phi_{E,\theta}.$$

En remplaçant dans le dernier terme de (85a)  $\Phi_{E,\theta}$  par sa valeur (84), nous obtenons

$$(85b) \quad \Phi_{E,\theta} = \{1 + K(E)I + [K(E)I]^2\} \Phi_{E,\theta}^{(0)} - \\ - i\pi \{1 + K(E)I + [K(E)I]^2\} P_E^{(0)} I \Phi_{E,\theta} + [K(E)I]^3 \Phi_{E,\theta}.$$

Pour continuer, on remplacerait dans le dernier terme de (85b)  $\Phi_{E,\theta}$  par sa valeur (84), et ainsi de suite. Finalement on obtient, si l'itération est convergente

$$(85) \quad \Phi_{E,\theta} = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [K(E)I]^n \right\} \Phi_{E,\theta}^{(0)} - i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [K(E)I]^n \right\} P_E^{(0)} I \Phi_{E,\theta},$$

donc

$$(86) \quad I \Phi_{E,\theta} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [IK(E)]^n \right\} I \Phi_{E,\theta}^{(0)} - i\pi \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} [IK(E)]^n \right\} I P_E^{(0)} I \Phi_{E,\theta}.$$

Introduisons maintenant l'opérateur  $U$  de Heitler et Peng généralisé

$$(87) \quad U = IS_+$$

Les éléments de matrice de  $U$  entre des états non perturbés de même énergie sont déterminés par l'équation de Heitler et Peng généralisée

$$(88) \quad \langle E'', \theta'' | U | E', \theta' \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' | [IK(E')]^n I | E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int d\theta \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' | [IK(E')]^n I | E', \theta \rangle \langle E', \theta | U | E', \theta' \rangle.$$

<sup>(15)</sup> W. PAULI: *Meson Theory of Nucl. Forces* (New York, 1946).

En réalité, HEITLER et PENG <sup>(2)</sup> suppriment certains termes dans (88), pour éviter les divergences qui apparaissent quand on veut appliquer (88) à des champs quantiques. Aujourd'hui on emploie plutôt d'autres méthodes pour éliminer les termes infinis.

Les résultats du paragraphe 3 nous permettent de comprendre d'une façon très claire la nature de la transformation de Heitler et Peng. En effet, il résulte des équations (69) et (70) que

$$(89) \quad U = IS_1 \left[ 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [iJ\tau] U \exp [-iJ\tau] d\tau \right],$$

done

$$(90) \quad \langle E'', \theta'' | \bar{U} | E', \theta' \rangle = \langle E'', \theta'' | IS_1 | E', \theta' \rangle - \\ - i\pi \int d\theta \langle E'', \theta'' | IS_1 | E', \theta \rangle \langle E', \theta | U | E', \theta' \rangle.$$

Le développement (46) des opérateurs  $S$  nous donne

$$(91) \quad \langle E'', \theta'' | IS_1 | E', \theta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle E'', \theta'' | [IK(E')]^n I | E', \theta \rangle,$$

done (90) est essentiellement l'équation de Heitler et Peng. Les considérations précédentes montrent que la méthode d'itération revient à exprimer  $S_+$  au moyen de  $S_1$  et à utiliser le développement (46) de  $S_1$ . L'équation (89) peut être considérée comme une forme de l'équation de Heitler et Peng.

L'équation de Heitler et Peng ne contient pas explicitement le temps. Il est possible de la remplacer par une équation équivalente, qui dépend du temps et qui est plus avantageuse dans certains cas. Il résulte de (69), (70), (61) et (54) que  $U(t, -\infty)$  satisfait à l'équation suivante, qui se réduit à celle de SCHWINGER <sup>(2)</sup> dans le cas d'un spectre continu pur

$$(92) \quad U(t, -\infty) = S'_1(t) \left[ 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) U(\tau, -\infty) d\tau \right].$$

Introduisons l'opérateur  $U'(t)$

$$(93) \quad U'(t) = \exp [iJt] U \exp [-iJt] = I'(t) U(t, -\infty),$$

$U'(t)$  satisfait à l'équation suivante

$$(94) \quad U'(t) = I'(t) S'(\tau) \left[ 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} U'(\tau) d\tau \right],$$

qui est équivalente à (89). Pour  $S'_1(t)$  nous pouvons employer le développement suivant

$$(95) \quad S'_1(t) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left( -\frac{i}{2} \right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_1) \varepsilon(t - \tau_1) d\tau_1 \times \\ \times \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_2) \varepsilon(\tau_1 - \tau_2) d\tau_2 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau_n) \varepsilon(\tau_{n-1} - \tau_n) d\tau_n,$$

qui est une conséquence de (11). L'équation que l'on obtient de (92), en remplaçant  $S'_1(t)$  par son développement (95), peut aussi être considérée comme une forme non stationnaire de l'équation de Heitler et Peng. Il est intéressant de remarquer que (92) n'est qu'un cas particulier de l'équation plus générale

$$(96) \quad U(t, t_0) = S'_1(t) \left[ 1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) U(\tau, t_0) \varepsilon(t_0 - \tau) d\tau \right].$$

Pour obtenir (96) il suffit de remarquer que (52) nous donne

$$(97) \quad U(t, t_0) = \left[ 1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) U(\tau, t_0) \varepsilon(t_0 - \tau) d\tau \right] - \\ - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} I'(\tau) U(\tau, t_0) \varepsilon(t - \tau) d\tau.$$

5. — Pour nous rendre bien compte de la signification de l'équation de Heitler et Peng, nous discuterons maintenant la signification physique de l'opérateur  $S_+$ . Considérons l'opérateur  $S_-$  défini par l'équation suivante

$$(98) \quad U(t, \infty) = \exp [iJt] S_- \exp [-iJt].$$

Il résulte de (96) que

$$(99) \quad S_- = \frac{1}{2} S_+ [1 + U(-\infty, \infty)] = S_+ R^+.$$

On vérifie facilement que

$$(100) \quad S_- \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - [\text{v.p. } (J - E)^{-1} - i\pi\delta(J - E)] I S_- \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Lorsque  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  représente des particules libres (ondes planes), la fonction d'onde perturbée est formée par la superposition d'ondes planes et d'ondes convergentes. Nous obtenons de (69) et (99)

$$(101) \quad S_+ + S_- = S_+ (R + R^+) = \frac{1}{2} S_+ [2 + U(\infty, -\infty) + U(-\infty, \infty)].$$

En tenant compte de la relation suivante

$$\begin{aligned}
 (102) \quad (S_+^+ + S_-^+)(S_+ + S_-) &= 2 + S_+^+ S_- + S_+^+ S_+ = \\
 &= 2 + U(-\infty, 0)U(0, \infty) + U(\infty, 0)U(0, -\infty) = \\
 &= 2 + U(-\infty, \infty) + U(\infty, -\infty),
 \end{aligned}$$

nous obtenons l'expression de  $S_1$  en termes de  $S_+$  et  $S_-$

$$(103) \quad (S_+ + S_-)[(S_+ + S_-)^+(S_+ + S_-)]^{-1} = \frac{1}{2} S_1,$$

c'est à dire que

$$(104) \quad (S_1^{-1})^+ = \frac{1}{2} (S_+ + S_-).$$

La fonction propre perturbée  $(S_1^{-1})^+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  satisfait à l'équation suivante

$$(105) \quad (S_1^{-1})^+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - \frac{1}{2} [(J - E)_+^{-1} I S_+ + (J - E)_-^{-1} I S_-] \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Lorsque  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  représente des ondes planes,  $(S_1^{-1})^+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  est formée par la superposition des ondes planes  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  et des ondes divergentes  $(1/2)(J - E)_+^{-1} I S_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  et convergentes correspondantes  $(1/2)(J - E)_-^{-1} I S_- \Phi_{E,\theta}^{(0)}$ . Il résulte des considérations précédentes que c'est  $(S_1^{-1})^+$ , plutôt que  $S_1$ , qui a une signification physique simple.

À chaque opérateur  $S$ , admettant un inverse  $S^{-1}$ , correspond un opérateur unitaire  $S'$

$$(106) \quad S' = S(S^+ S)^{-1/2} = (S S^+)^{-1/2} S;$$

$S'$  est une solution de l'équation (18), parce que  $S^+ S$  commute avec  $J$  et  $S S^+$  commute avec  $H$

$$(107) \quad (S^+ S) J = S^+ H S = J (S^+ S), \quad H (S S^+) = S J S^+ = (S S^+) H.$$

En tenant compte des relations suivantes

$$\begin{aligned}
 (108) \quad S_+ &= \frac{1}{2} S_1 (1 + \exp[i\eta]), \quad S_- = \frac{1}{2} S_1 (1 + \exp[-i\eta]), \\
 \exp[i\eta] &= U(\infty, -\infty),
 \end{aligned}$$

nous obtenons

$$(109) \quad S'_1 = S_1 \cos \frac{1}{2} \eta, \quad (S_1^{-1})^+ = 2 S_1 \cos^2 \frac{1}{2} \eta.$$



$S_1$  a la propriété fondamentale d'avoir des éléments de matrice nuls entre des états non perturbés différents de même énergie. En conséquence de cela, la fonction perturbée  $S_1 \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  est une combinaison linéaire de  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  et de fonctions propres non perturbées  $\Phi_{E',\theta'}^{(0)}$ , ( $E' \neq E$ ). L'opérateur unitaire  $S_1'$  n'a plus ces propriétés, parce que  $\eta$  ne commute pas avec les opérateurs  $\theta_{op}$ , de la représentation  $(H_0, \theta_{op})$ .

### La méthode d'approximation de Born.

6. — Les résultats des paragraphes précédents nous permettent de formuler d'une façon très générale la méthode d'approximation de BORN<sup>(16)</sup>, et ils se prêtent bien à la discussion de ses rapports avec la théorie quantique du damping. La fonction d'onde qui décrit la diffusion est une solution de l'équation

$$(110) \quad (J - E)\Phi_{E,\theta} = -I\Phi_{E,\theta},$$

qui doit satisfaire aux conditions de la diffusion. Dans la méthode de Born on cherche un développement pour  $\Phi_{E,\theta}$

$$(111) \quad \Phi_{E,\theta} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_{E,\theta}^{(n)}.$$

Les  $\Phi_{E,\theta}^{(n)}$  sont déterminées par les équations

$$(112) \quad (J - E)\Phi_{E,\theta}^{(n)} = -I\Phi_{E,\theta}^{(n-1)}, \quad (n \geq 1)$$

et la condition que les  $\Phi_{E,\theta}^{(n)}$ , pour  $n \geq 1$ , représentent des ondes diffusées. Nous avons démontré que, pour avoir des ondes diffusées (divergentes), il faut prendre

$$(113) \quad \Phi_{E,\theta}^{(n)} = -(J - E)_+^{-1} I \Phi_{E,\theta}^{(n-1)}, \quad (n \geq 1)$$

donc

$$(114) \quad \Phi_{E,\theta}^{(n)} = (-1)^n [(J - E)_+^{-1} I]^n \Phi_{E,\theta}.$$

D'autre part, nous obtenons de (110) et de la condition pour la diffusion

$$(115) \quad \Phi_{E,\theta} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - (J - E)_+^{-1} I \Phi_{E,\theta}.$$

La solution de cette équation est

$$(116) \quad \Phi_{E,\theta} = [1 + (J - E)_+^{-1} I]^{-1} \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

<sup>(16)</sup> M. BORN: *Zeits. f. Phys.*, **38**, 803 (1926).

En introduisant dans (116) le développement de Liouville-Neumann suivant

$$(117) \quad [1 + (J - E)_+^{-1}I]^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(J - E)_+^{-1}I]^n,$$

nous retrouvons le développement de Born (111)-(114). La méthode de Born utilise le développement de Liouville-Neumann de  $[1 - K(E)I + i\pi P_E^{(0)}I]^{-1}$ , tandis que dans la théorie quantique du damping on utilise le développement de Liouville-Neumann de l'opérateur  $[1 - K(E)I]^{-1}$  et après cela on résout l'équation de Heitler et Peng. Même quand la perturbation est assez petite, les opérateurs  $K(E)I$  et  $P_E^{(0)}I$  ne sont pas nécessairement petits, parce que  $K(E)$  a un spectre qui n'est pas borné en valeur absolue et

$$(118) \quad P_E^{(0)}\Phi_{E',\theta'}^{(0)} = \delta(E - E')\Phi_{E',\theta'}^{(0)}.$$

En général les développements de Liouville-Neumann (33) et (117) ne seront pas convergents, mais la situation est plus défavorable dans le cas de (117), à cause de (118).

La méthode de Born se rattache à un développement de  $S_+$  analogue à celui de  $S_+$  obtenu de (46). Il résulte de (55) que

$$(119) \quad \begin{cases} S_+ P_i^{(0)} = P_i^{(0)} - K(E_i)I S_+ P_i^{(0)}, \\ S_+ P_E^{(0)} = P_E^{(0)} + K(E)I S_+ P_E^{(0)} - i\pi P_E^{(0)}I S_+ P_E^{(0)}, \end{cases}$$

nous avons donc

$$(120) \quad \begin{cases} S_+ P_i^{(0)} = [1 - K(E_i)I]^{-1}P_i^{(0)}, \\ S_+ P_E^{(0)} = [1 - K(E)I + i\pi P_E^{(0)}I]^{-1}P_E^{(0)}, \end{cases}$$

$$(121) \quad S_+ = \sum [1 - K(E_i)I]^{-1}P_i^{(0)} + \int [1 + (J - E)_+^{-1}I]^{-1}P_E^{(0)}dE.$$

Il est intéressant de remarquer que le développement (121) est une conséquence de la série de Peano pour  $U(t, t_0)$

$$(122) \quad U(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{t_0}^t I'(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} I'(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} I'(\tau_n) d\tau_n.$$

En prenant comme variables d'intégration les  $t_r = \tau_r - \tau_{r-1}$  ( $\tau_0 = 0$ ), nous obtenons

$$(123) \quad \begin{aligned} U(0, \infty) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_1]I dt_1 \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_2]I dt_2 \dots \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_n]I \exp[-iJ\tau_n] dt_n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n \times \\ &\times \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_1]I dt_1 \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_2]I dt_2 \dots \int_{-\infty}^0 \exp[iJt_n]I \exp[-iJ \sum_{r=1}^n t_r] dt_n. \end{aligned}$$

En remplaçant dans (123)  $\exp[-iJ \sum_r t_r]$  par sa décomposition spectrale, cette équation dévient

$$(124) \quad U(0, -\infty) = 1 + \sum_l \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -i \int_{-\infty}^0 \exp[i(J - E_l)\tau] d\tau I \right]^n P_l^{(0)} + \\ + \int dE \sum_{n=1}^{\infty} \left[ -i \int_{-\infty}^0 \exp[i(J - E)\tau] d\tau I \right]^n P_E^{(0)}.$$

En tenant compte des relations suivantes

$$(125) \quad \begin{cases} -i \int_{-\infty}^0 \exp[i(J - E_l)\tau] d\tau = K(E_l), \\ -i \int_{-\infty}^0 \exp[i(J - E)\tau] d\tau = K(E) - i\pi P_E^{(0)}, \end{cases}$$

et des développements de Liouville-Neumann de  $[1 - K(E_l)I]^{-1}$  et de  $[1 - K(E)I + i\pi P_E^{(0)}I]^{-1}$  nous obtenons (121).

La formule (121) nous permet d'obtenir la relation suivante entre  $S_+$  et  $S_1$

$$(126) \quad S_+ = \sum_l S_1 P_l^{(0)} + \int [1 + i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 P_E^{(0)} dE.$$

Il résulte de (126) que

$$(127) \quad \Phi_{E,\theta} = [1 + i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 \Phi_{E,\theta}^{(0)}.$$

Cette équation nous donne la relation entre la fonction propre perturbée de la diffusion  $\Phi_{E,\theta}$  et celle donnée par la méthode de perturbation de Schrödinger  $S_1 \Phi_{E,\theta}^{(0)}$ . L'opérateur appliqué à  $S_1 \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  fait la correction d'amortissement (damping). Pour démontrer (126) il suffit de tenir compte des équations

$$(128) \quad S_1 P_l^{(0)} = [1 - K(E_l)I]^{-1} P_l^{(0)}, \quad S_1 P_E^{(0)} = [1 - K(E)I]^{-1} P_E^{(0)};$$

$$(129) \quad [1 + i\pi S_1 P_E^{(0)} I]^{-1} S_1 P_E^{(0)} = [1 + i\pi [1 - K(E)I]^{-1} P_E^{(0)} I]^{-1} [1 - K(E)I]^{-1} P_E^{(0)} \\ = [1 - K(E)I + i\pi P_E^{(0)} I]^{-1} P_E^{(0)} = [1 + (J - E)_+^{-1} I]^{-1} P_E^{(0)}.$$

## DEUXIÈME PARTIE

## PERTURBATIONS DE SYSTÈMES A SELF-ENERGY

7. — Dans les considérations des sections précédentes nous avons toujours admis que chaque fonction propre perturbée  $\Phi_{E,\theta}$  correspondait à une fonction propre non perturbée  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  de même énergie. Il est possible d'établir une théorie plus générale, dans laquelle à  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$  correspond une fonction propre perturbée d'énergie  $\bar{E}_\theta$

$$(130) \quad \bar{E}_\theta = F(E, \theta, \lambda),$$

la fonction  $F$  satisfaisant à la condition suivante

$$(131) \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} F(E, \theta, \lambda) = E.$$

La différence  $\bar{E}_\theta - E$  peut être considérée comme la self-energy de l'état perturbé, lorsque le système est constitué par des champs en interaction.

Nous introduirons l'opérateur de projection  $\bar{P}_{\bar{E}}^{(0)}$  sur la variété des fonctions propres de  $H_0$  auxquelles correspondent des fonctions perturbées d'énergie  $\bar{E}$

$$(132) \quad \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} = \int P_{E,\theta}^{(0)} \delta(\bar{E} - F(E, \theta, \lambda)) dE d\theta.$$

On établit facilement les relations suivantes

$$(133) \quad \int \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} d\bar{E} = \int P_E^{(0)} dE, \quad \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} \bar{P}_{\bar{E}'}^{(0)} = \delta(\bar{E} - \bar{E}') \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)}.$$

Nous remplacerons maintenant l'équation (18) par la suivante

$$(134) \quad H\bar{S} = \bar{S}\bar{J},$$

avec

$$(135) \quad J = \sum_i E_i P_i^{(0)} + \int \bar{E} \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} d\bar{E} = \sum_i E_i P_i^{(0)} + \int \bar{E}_\theta P_{E,\theta}^{(0)} dE d\theta,$$

et la décomposition (6) par la suivante

$$(136) \quad H = \bar{J} + \bar{I}.$$

Dans le cas d'un spectre continu pur, nous avons

$$(137) \quad J = H_0, \quad \bar{J} = F(H_0, \theta_{op}, \lambda),$$

les  $\theta_{op}$  étant les opérateurs qui forment avec  $H_0$  le système complet d'opérateurs commutables dont les fonctions propres communes sont les  $\Phi_{E,\theta}^{(0)}$ . Il est évident que le choix de la fonction  $F$  est arbitraire, dans une large mesure. Il suffit que le spectre de  $\bar{J}$  coïncide avec celui de  $H$ . Nous pouvons traiter (134) comme nous l'avons fait avec (18). La formule (29) est remplacée par la suivante

$$(138) \quad \bar{S} = \sum_l [1 - \bar{K}(E_l)\bar{I}]^{-1} P_l^{(0)} \bar{S} P_l^{(0)} + \\ + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int d\bar{E} [1 - \bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^{-1} \cos [(\bar{J} - \bar{E})\tau] \bar{S} \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)},$$

avec

$$(139) \quad \bar{K}(u) = \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i(\bar{J} - u)\tau] \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Il faut introduire une nouvelle définition de la partie diagonale  $A_0$  d'un opérateur  $A$

$$(140) \quad A_D = \sum_l P_l^{(0)} A P_l^{(0)} + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \cos [(J - \bar{E}')\tau] A \bar{P}_{\bar{E}'}^{(0)} dE'.$$

La formule qui correspond à (32) est

$$(141) \quad \bar{S} = \left\{ \sum_l [1 - \bar{K}(E_l)\bar{I}]^{-1} P_l^{(0)} + \int d\bar{E} [1 - \bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^{-1} \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} \right\} \bar{S}_D.$$

Il y a un opérateur  $\bar{S}_1$  analogue à  $S_1$

$$(142) \quad (\bar{S}_1)_D = 1,$$

qui satisfait à l'équation intégrale

$$(143) \quad \bar{S}_1 = 1 + \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp [i\bar{J}\tau] \bar{I} \bar{S}_1 \exp [-i\bar{J}\tau] \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Les valeurs propres discrètes de  $H$  sont déterminées par des équations analogues à (34)

$$(144) \quad \langle l | \bar{I} \bar{S}_1 | l \rangle = 0.$$

Ces équations résultent de la relation analogue à (36)

$$(145) \quad (\bar{I} \bar{S}_1)_D = 0.$$



Nous obtenons de (144) le développement

$$(146) \quad E_i = E_i^{(0)} + \langle l | H_p | l \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \langle l | \bar{I} [\bar{K}(E_i) \bar{I}]^n | l \rangle.$$

De (145) nous obtenons aussi la relation suivante

$$(147) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos [\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'}] \tau \langle E, \theta | \bar{I} \bar{S}_1 | E', \theta' \rangle = 0,$$

qui nous donne

$$(148) \quad \begin{aligned} \bar{E}_\theta = E + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \cos [(\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'}) \tau] \langle E, \theta | H_p | E', \theta' \rangle dE' d\theta' + \\ + \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \cos [(\bar{E}_\theta - \bar{E}'_{\theta'}) \tau] \sum_{n=1}^{\infty} \langle E, \theta | \bar{I} [\bar{K}(\bar{E}'_{\theta'}) \bar{I}]^n | E', \theta' \rangle dE' d\theta'. \end{aligned}$$

Cette relation doit être considérée comme une identité, puisque les  $\bar{E}_\theta$  peuvent être choisis d'une façon largement arbitraire. Il est intéressant de remarquer qu'il y a une identité correspondante dans la méthode de la première partie de ce travail, cas particulier de (148)

$$(149) \quad \begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int \cos [(E - E') \tau] \left\{ \langle E, \theta | H_p | E', \theta' \rangle + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \langle E, \theta | I [K(E') I]^n | E', \theta' \rangle \right\} dE' d\theta' = 0. \end{aligned}$$

Les considérations précédentes montrent que, pour définir de façon univoque les self-énergies, il faut ajouter quelque condition restrictive à la théorie des perturbations, dans le cas de spectres continus.

8. - Dans le traitement dynamique du cas des champs, nous remplacerons  $U(t, t_0)$  par l'opérateur  $\bar{U}(t, t_0)$

$$(150) \quad \bar{U}(t, t_0) = \exp [i \bar{J} t] V(t - t_0) \exp [-i \bar{J} t_0],$$

qui satisfait aux équations suivantes

$$(151) \quad i \frac{d}{dt} \bar{U}(t, t_0) = \bar{I}'(t) \bar{U}(t, t_0), \quad \bar{U}(t_0, t_0) = 1, \quad (\bar{I}'(t) = \exp [i \bar{J} t] \bar{I} \exp [-i \bar{J} t]),$$

$$(152) \quad \bar{U}(t, t_0) = 1 - i \int_{t_0}^t \bar{I}'(\tau) \bar{U}(\tau, t_0) d\tau.$$

Au moyen de  $\bar{U}(t, -\infty)$  nous pouvons définir  $\bar{S}_+$

$$(153) \quad \bar{U}(t, -\infty) = \exp[i\bar{J}t]\bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}t], \quad \frac{d}{dt} \bar{S}_+ = 0;$$

$\bar{S}_+$  est la solution de l'équation intégrale

$$(154) \quad \bar{S}_+ = 1 - i \int_{-\infty}^0 \exp[i\bar{J}\tau] \bar{I} \bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}\tau] d\tau,$$

$\bar{S}_+$  est l'opérateur  $\bar{S}$  de la diffusion.  $\bar{S}_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)}$  est une fonction propre de  $H$  correspondant à la valeur propre  $\bar{E}_\theta$ . Nous avons

$$(155) \quad \bar{S}_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)} = \Phi_{E,\theta}^{(0)} - [i\pi\delta(\bar{J} - \bar{E}_\theta) + \text{v.p.} (\bar{J} - \bar{E}_\theta)^{-1}] \bar{I} \bar{S}_+ \Phi_{E,\theta}^{(0)},$$

avec

$$(156) \quad \text{v.p.} (\bar{J} - \bar{E}_\theta)^{-1} = \bar{K}(\bar{E}_\theta).$$

Il y a un opérateur  $\bar{S}'_1(t)$  analogue à  $S'_1(t)$

$$(157) \quad \bar{S}'_1(t) = \exp[i\bar{J}t] \bar{S}_1 \exp[-i\bar{J}t],$$

$\bar{S}'_1(t)$  est la solution de l'équation intégrale

$$(158) \quad \bar{S}'_1(t) = 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}'_1(\tau) \bar{S}'_1(\tau) \varepsilon(t - \tau) d\tau.$$

Nous avons une relation analogue à (92)

$$(159) \quad \bar{U}(t, -\infty) = \bar{S}'_1(t) \left[ 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{I}'(\tau) \bar{U}(\tau, -\infty) d\tau \right],$$

c'est à dire que

$$(160) \quad \bar{U}(t, -\infty) = \frac{1}{2} \bar{S}'_1(t) [1 + \bar{U}(\infty, -\infty)].$$

On vérifie facilement que

$$(161) \quad \begin{aligned} \bar{U}(\infty, -\infty) &= 1 - i \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\bar{J}\tau] \bar{I} \bar{S}_+ \exp[-i\bar{J}\tau] d\tau = \\ &= 1 - 2\pi i \int d\bar{E}_E^{(0)} \bar{P}_E^{(0)} \bar{I} \bar{S}_+ \bar{P}_E^{(0)}. \end{aligned}$$

$\bar{U}(\infty, -\infty)$  est une généralisation de l'opérateur de collision de HEISEN-

BERG <sup>(6)</sup> (matrice caractéristique), qui coïncide avec  $U(\infty, -\infty)$  dans le cas d'un spectre continu pur. Nous avons

$$(162) \quad [\bar{U}(\infty, -\infty), \bar{J}] = 0.$$

Tandis que  $U(\infty, -\infty)$  commute avec  $J$ ,  $\bar{U}(\infty, -\infty)$  commute avec  $\bar{J}$ , mais ne commute pas en général avec  $J$ . La couche des états qui interviennent dans la diffusion est caractérisée par une valeur de l'énergie observable  $\bar{E}$  et non plus par une valeur de  $E$ , comme dans les problèmes ordinaires de collision. Cela correspond à l'emploi des masses observables, qui incluent déjà les corrections radiatives (self-energies). La modification de la couche apparaît clairement dans la forme différente de l'équation du damping, qui n'est plus celle de HEITLER et PENG. En effet, nous devons remplacer l'opérateur de Heitler et Peng  $U$  par  $\bar{U}$

$$(163) \quad \bar{U} = \bar{I}\bar{S},$$

et l'équation (89) par la suivante

$$(164) \quad \bar{U} = \bar{I}\bar{S}_1 \left[ 1 - \frac{i}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp[i\bar{J}\tau] \bar{U} \exp[-i\bar{J}\tau] d\tau \right],$$

qui donne

$$(165) \quad \begin{aligned} \langle E'' \theta'' | \bar{U} | E' \theta' \rangle &= \langle E'' \theta'' | \bar{I}\bar{S}_1 | E' \theta' \rangle - \\ &- i\pi \int dE d\theta \langle E'' \theta'' | \bar{I}\bar{S}_1 | E \theta \rangle \delta(\bar{E}_\theta - \bar{E}'_\theta) \langle E \theta | \bar{U} | E' \theta' \rangle. \end{aligned}$$

Cette équation est essentiellement différente de l'équation donnée par HEITLER et MA <sup>(9)</sup> pour tenir compte des corrections radiatives des masses.

### Élimination des termes séculaires dans la série de Peano pour $V(t)$ .

9. — Nous avons montré, dans la partie déjà publiée de ce travail <sup>(1)</sup>, qu'on pouvait négliger tous les termes séculaires dans la série de Peano pour  $U(t, t_0)$ , dans le cas de spectres discrets. Nous étendrons maintenant ce résultat au cas de systèmes à spectres continus, en remplaçant  $U(t, t_0)$  par  $\bar{U}(t, t_0)$  pour avoir un résultat plus général.

La série de Peano pour  $\bar{U}(t, t_0)$  est

$$(166) \quad \bar{U}(t, t_0) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{U}_n(t, t_0),$$

avec

$$(167) \quad \bar{U}_n(t, t_0) = (-i)^n \int_{t_0}^t \bar{I}'(\tau_1) d\tau_1 \int_{t_0}^{\tau_1} \bar{I}'(\tau_2) d\tau_2 \dots \int_{t_0}^{\tau_{n-1}} \bar{I}'(\tau_n) d\tau_n,$$

donc

$$(168) \quad V(t) = \exp[-i\bar{J}t] + \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t), \quad V_n(t) = \exp[-i\bar{J}t] \bar{U}_n(t, 0).$$

Nous considérerons maintenant, pour simplifier, le cas d'un spectre continu pur. Il résulte de (168) et (167) que

$$(169) \quad V_n(t) = \int dE_0 d\theta_0 dE_1 d\theta_1 \dots dE_n d\theta_n P_{E_0, \theta_0; E_n, \theta_n}^{(0)} \times \\ \times \langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \langle E_1, \theta_1 | \bar{I} | E_2, \theta_2 \rangle \dots \langle E_{n-1}, \theta_{n-1} | \bar{I} | E_n, \theta_n \rangle \times \\ \times \left[ \frac{\exp[-i\bar{E}_{1, \theta_1} t] - \exp[-i\bar{E}_{0, \theta_0} t]}{(\bar{E}_{1, \theta_1} - \bar{E}_{0, \theta_0})(\bar{E}_{1, \theta_1} - \bar{E}_{2, \theta_2}) \dots (\bar{E}_{1, \theta_1} - \bar{E}_{n, \theta_n})} + \dots + \right. \\ \left. + \frac{\exp[-i\bar{E}_{n, \theta_n} t] - \exp[-i\bar{E}_{0, \theta_0} t]}{(\bar{E}_{n, \theta_n} - \bar{E}_{0, \theta_0})(\bar{E}_{n, \theta_n} - \bar{E}_{1, \theta_1}) \dots (\bar{E}_{n, \theta_n} - \bar{E}_{n-1, \theta_{n-1}})} \right].$$

Les dénominateurs que s'annulent donnent lieu à des termes séculaires. On démontre, comme dans le cas du spectre discret, que l'on a un terme en  $t^p$  lorsque  $E_{0, \theta_0} = \bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p$ )

$$(170) \quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^p \left[ \prod_{\theta_{\alpha'} \neq r_{\alpha}} (\bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}} - \bar{E}_{\theta_{\alpha'}, \theta_{\theta_{\alpha}}}) \right]^{-1} (\exp[i(\bar{E}_{0, \theta_0} - \bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}})t] - 1) \right\}_{(\bar{E}_{r_{\alpha'}, \theta_{r_{\alpha'}}} = \bar{E}_{0, \theta_0})} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!} \left[ \prod_{\theta \neq 0, r_{\alpha'}} (\bar{E}_{0, \theta_0} - \bar{E}_{\theta, \theta_{\theta}}) \right]^{-1} \quad (\alpha' = 1, 2, \dots, p).$$

L'autre type de terme séculaire de (169) correspond à  $\bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}} - \bar{E}_{r_{\alpha'}, \theta_{r_{\alpha}}} \neq \bar{E}_{0, \theta_0}$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, p+1$ )

$$(171) \quad \left\{ \sum_{\alpha=1}^{p+1} \left[ \prod_{\theta_{\alpha'} \neq r_{\alpha}} (\bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}} - \bar{E}_{\theta_{\alpha'}, \theta_{\theta_{\alpha}}}) \right]^{-1} (\exp[i(\bar{E}_{0, \theta_0} - \bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}})t] - 1) \right\}_{(\bar{E}_{r_{\alpha'}, \theta_{r_{\alpha'}}} - \bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}})} = \\ = \frac{(-it)^p}{p!} \exp[i(\bar{E}_{0, \theta_0} - \bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}})t] \left[ \prod_{\theta \neq r_{\alpha'}} (\bar{E}_{r_{\alpha}, \theta_{r_{\alpha}}} - \bar{E}_{\theta, \theta_{\theta}}) \right]^{-1} \\ (\alpha' = 1, 2, \dots, p+1).$$

Les termes séculaires du type (171) ne donnent pas de contribution en (169).

Ceux du type (170) ne peuvent être importants que pour  $n$  égal à un des  $r_a$ . Nous verrons qu'il est possible de se débarrasser de ces termes séculaires, en faisant la somme de contributions provenant d'approximations différentes et en tenant compte de la relation (145)

$$(I\bar{S}_1)_D = 0,$$

qui peut être mise sous la forme suivante

$$(172) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \int dE d\bar{E}' \cos [(\bar{E} - E')\tau] \bar{P}_{\bar{E}}^{(0)} \{ I[\bar{K}(E')\bar{I}]^n \} P_{\bar{E}'}^{(0)} = 0,$$

en y introduisant le développement (141). Il résulte de la définition (139) de  $\bar{K}$  que

$$(173) \quad \begin{aligned} \bar{I}[\bar{K}(\bar{E})\bar{I}]^n &= \text{v.p.} \int P_{\bar{E}_0, \theta_0; E', \theta'}^{(0)} dE' d\theta' dE_0 d\theta_0 \dots dE_n d\theta_n \times \\ &\times \frac{\langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \langle E_1, \theta_1 | \bar{I} | E_2, \theta_2 \rangle \dots \langle E_n, \theta_n | \bar{I} | E', \theta' \rangle}{(\bar{E} - \bar{E}_{1, \theta_1})(\bar{E} - \bar{E}_{2, \theta_2}) \dots (\bar{E} - \bar{E}_{n, \theta_n})}, \end{aligned}$$

dans le cas d'un spectre continu pur. Nous obtenons de (172) et (173) la relation

$$(174) \quad \begin{aligned} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \text{v.p.} \int dE_1 d\theta_1 \dots dE_n d\theta_n \cos [(\bar{E}_\theta - \bar{E}_{0, \theta_0})\tau] \times \\ \times \frac{\langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \langle E_1, \theta_1 | \bar{I} | E_2, \theta_2 \rangle \dots \langle E_n, \theta_n | \bar{I} | E, \theta \rangle}{(\bar{E}_\theta - \bar{E}_{1, \theta_1})(\bar{E}_\theta - \bar{E}_{2, \theta_2}) \dots (\bar{E}_\theta - \bar{E}_{n, \theta_n})} = 0. \end{aligned}$$

Nous avons vu que des termes séculaires ne peuvent exister que dans les éléments de matrice diagonaux de  $V_n(t)$ , il nous suffit donc d'examiner la partie diagonale  $V_n(t)_D$

$$(175) \quad \begin{aligned} V_n(t)_D &= \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int dE_0 d\theta_0 dE_1 d\theta_1 \dots dE_n d\theta_n \cos [(\bar{E}_{0, \theta_0} - E_{n, \theta_n})\tau] \times \\ &\times P_{\bar{E}_{0, \theta_0}; E_n, \theta_n}^{(0)} \langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_{1, \theta_1} \rangle \dots \langle E_{n-1}, \theta_{n-1} | \bar{I} | E_n, \theta_n \rangle \times \\ &\times \left[ \frac{\exp[-i\bar{E}_{1, \theta_1}t] - \exp[-i\bar{E}_{0, \theta_0}t]}{(\bar{E}_{1, \theta_1} - \bar{E}_{0, \theta_0}) \dots (\bar{E}_{1, \theta_1} - \bar{E}_{n, \theta_n})} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\exp[-i\bar{E}_{n, \theta_n}t] - \exp[-i\bar{E}_{0, \theta_0}t]}{(\bar{E}_{n, \theta_n} - \bar{E}_{0, \theta_0}) \dots (\bar{E}_{n, \theta_n} - \bar{E}_{n-1, \theta_{n-1}})} \right]. \end{aligned}$$



Le terme, sous l'intégrale en (175), qui correspond à (170) est  $C_n(t)$

$$(176) \quad C_n(t) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \cos [(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{n,\theta_n})\tau] P_{E_{0,\theta_0}; E_{n,\theta_n}}^{(0)} \times \\ \times \left[ \prod_{\varrho \neq 0, r_{\varrho}} (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{\varrho,\theta_{\varrho}}) \right]^{-1} \frac{(-it)^p}{p!} \times \\ \times \langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \dots \langle E_{r_1}, \theta_{r_1} | \bar{I} | E_{r_1+1}, \theta_{r_1+1} \rangle \dots \langle E_{n-1}, \theta_{n-1} | \bar{I} | E_n, \theta_n \rangle.$$

Nous écrirons  $C_n(t)$  sous la forme suivante

$$(177) \quad C_n(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \dots \langle E_{r_1-1}, \theta_{r_1-1} | \bar{I} | E_{r_1}, \theta_{r_1} \rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-1,\theta_{r_1-1}})} B(t),$$

$r_1$  est le plus petit des  $r_\alpha$ . Dans l'intégrale de  $V_{n-s}(t)_D$  il y a le terme  $C_{n-s}(t)$ , ( $s = 1, 2, \dots, r_1 - 1$ )

$$(178) \quad C_{n-s}(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \dots \langle E_{r_1-s-1}, \theta_{r_1-s-1} | \bar{I} | E_{r_1}, \theta_{r_1} \rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-s-1,\theta_{r_1-s-1}})} B(t),$$

et dans l'intégrale de  $V_{n+s'}(t)_D$  le terme  $C_{n+s'}(t)$ , ( $s' = 1, 2, \dots, \infty$ )

$$(179) \quad C_{n+s'}(t) = \frac{\langle E_0, \theta_0 | \bar{I} | E_1, \theta_1 \rangle \dots \langle E_{r_1-1}, \theta_{r_1-1} | \bar{I} | E'_{r_1}, \theta'_{r_1} \rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{1,\theta_1}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}_{r_1-1,\theta_{r_1-1}})} \times \\ \times \frac{\langle E'_{r_1}, \theta'_{r_1} | \bar{I} | E'_{r_1+1}, \theta'_{r_1+1} \rangle \dots \langle E'_{r_1+s'-1}, \theta'_{r_1+s'-1} | \bar{I} | E_{r_1}, \theta_{r_1} \rangle}{(\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}'_{r_1,\theta_{r_1}}) \dots (\bar{E}_{0,\theta_0} - \bar{E}'_{r_1+s'-1,\theta'_{r_1+s'-1}})} B(t).$$

Il résulte de (174) que les contributions de tous les  $C$  s'entre-détruisent. Puisque  $U(t, t_0)$  est la forme particulière de  $\bar{U}(t, t_0)$  qui correspond à  $F(E, \theta; \lambda) = E$ , il y a aussi compensation des termes séculaires dans le développement de  $U(t, t_0)$ .

#### RIASSUNTO (\*)

I metodi indicati in un precedente lavoro <sup>(1)</sup> per il caso di spettri discreti si generalizzano per i casi di spettri continui e misti. Si considerano sistemi di particelle e campi quantici. Si mostra che la self-energy d'uno stato dello spettro continuo non è determinata dal calcolo delle perturbazioni a causa dell'ambiguità nella corrispondenza tra livelli perturbati e non perturbati. Si dà una forma modificata dell'equazione di Heitler e Peng per i casi di self-energy. Si mostra che è possibile eliminare i termini secolari nello sviluppo dell'operatore unitario del moto.

N.B. I risultati per i sistemi di particelle sono stati esposti al Colloquio sulla Matematica dell'Elettrone, tenuto nell'Aprile 1949 a l'Université Libre di Bruxelles.

(\*) Traduzione a cura della Redazione.



# LETTERE ALLA REDAZIONE

(La responsabilità scientifica degli scritti inseriti in questa rubrica è completamente lasciata dalla Direzione del periodico ai singoli autori)

## Modifiche apportate ad un impianto acceleratore per ioni positivi.

M. AGENO, M. CHIOZZOTTO e R. QUERZOLI

*Laboratorio di Fisica dell'Istituto Superiore di Sanità - Roma*

(ricevuto il 23 Aprile 1951)

Nello scorso anno, all'impianto acceleratore per ioni positivi a 1100 kV dell'Istituto Superiore di Sanità di Roma sono state apportate numerose modifiche allo scopo di aumentarne l'intensità. Le principali tra esse sono:

1) Sostituzione della sorgente di ioni con altra sorgente ad alta tensione, dimensionata e raffreddata in modo tale da sopportare tensioni di scarica fino a 50 kV con correnti fino a 10-20 mA.

2) Sostituzione degli attacchi degli elementi di lente elettrostatica, per facilitarne il centraggio e l'allineamento.

3) Sostituzione di tutto il sistema di pompe, a diffusione e rotative, con altro di tiraggio assai maggiore, per migliorare il vuoto in condizioni dinamiche di lavoro.

4) Trasferimento del posto di manovra in zona lontana dal bersaglio e protetta dalle radiazioni e conseguente

impianto di un complesso sistema di telecomandi e sicurezze automatiche.

5) Ampliamento dei locali a disposizione per esperienze e misure in prossimità del bersaglio, anche allo scopo di diminuire la radiazione diffusa.

I particolari della nuova sistemazione saranno pubblicati sui *Rendiconti dell'Istituto Superiore di Sanità*.

Nel nuovo assetto, si sono ottenute finora sul bersaglio correnti ioniche fino a 320-340  $\mu$ A e con le reazioni  $\text{Li}(d, n)$  si è ottenuto a 900 kV un flusso di neutroni fino a circa 1300 Curie-equivalenti.

Si ritiene che tale intensità (in soddisfacente accordo coi dati di rendimento di AMALDI, HAFSTAD e TUVE <sup>(1)</sup>) possa in un prossimo avvenire essere sensibilmente superata.

<sup>(1)</sup> E. AMALDI, L. R. HAFSTAD e M. A. TUVE: *Phys Rev.*, **51**, 896 (1937).

## Il fattore di utilizzazione termica in simmetria cilindrica.

L. ORSONI

*Laboratori CISE - Milano*

(ricevuto il 23 Aprile 1951)

Nel noto articolo di FERMI sulla teoria elementare della pila è riportata una formula che fornisce il fattore di utilizzazione termica  $f$  per i reattori nucleari a reticolo cubico (<sup>1</sup>). Nel caso di reattori ad acqua pesante si preferisce però, per ragioni tecniche di costruzione e di esercizio, usare l'Uranio in sbarre cilindriche disposte verticalmente con regolarità entro l'acqua pesante in modo da formare un reticolo quadrato o esagonale centrato. In tal caso le celle elementari costituenti il reattore nella approssimazione di Wigner-Seitz sono cilindriche anziché sferiche (queste ultime corrispondono al caso del reticolo cubico), e se si calcola il fattore  $f$  per un reattore di dimensioni infinite partendo dalle seguenti ipotesi:

a) validità della teoria elementare della diffusione,

b) costanza della funzione di sorgente dei neutroni termici entro il moderatore.

e, tenendo conto delle seguenti condizioni al contorno:

$\alpha$ ) la densità dei neutroni termici deve essere: 1) finita entro l'Uranio, 2) continua sulla superficie di contatto Uranio-moderatore, 3) massima sulla superficie esterna della cella,

$\beta$ ) il numero dei neutroni termici catturati nell'unità di tempo dall'Uranio e dal moderatore deve essere uguale al numero di neutroni termici generati nell'unità di tempo entro il moderatore;

si trova la formula:

$$(1) \quad f = 2 \frac{\alpha_u}{\beta_u^2 - \alpha_u^2} \frac{\tau_{cm}}{\tau_{cu}} \frac{A_1 \cdot I_1(\alpha_u)}{A_1 \cdot I_0(\alpha_u) + A_2 \cdot I_1(\alpha_u)},$$

dove

$$(2) \quad A_1 = D_m \alpha_m [I_1(\beta_m) K_1(\alpha_m) - I_1(\alpha_m) K_1(\beta_m)]$$

$$(3) \quad A_2 = D_u \alpha_u [I_0(\alpha_m) K_1(\beta_m) + I_1(\beta_m) K_0(\alpha_m)].$$

(<sup>1</sup>) E. FERMI: *Science*, **105**, 8 (1947). La dimostrazione della formula data da Fermi può trovarsi in: M. SILVESTRI: *Rapporto CISE n. 8* (1948).

Ponendo

$a$  = raggio dei cilindri di Uranio

$b$  = raggio delle celle cilindriche elementari

$L_u$  = lunghezza di diffusione dei neutroni entro l'Uranio

$L_m$  = idem entro il moderatore,

i simboli usati nelle formule (1) (2) (3) hanno il significato seguente:

$$\alpha_u = \frac{a}{L_u}, \quad \alpha_m = \frac{a}{L_m}, \quad \beta_u = \frac{b}{L_u}, \quad \beta_m = \frac{b}{L_m}$$

$\tau_{cu}$  = vita media di cattura dei neutroni entro l'Uranio

$\tau_{cm}$  = idem entro il moderatore

$D_u$  = coefficiente di diffusione dei neutroni entro l'Uranio

$D_m$  = idem entro il moderatore

$I_0, I_1, K_0, K_1$  = funzioni di Bessel modificate di ordine zero e uno, e di prima e di seconda specie.

Se si fa intervenire nell'espressione di  $f$  l'albedo  $\gamma$  dei cilindri di Uranio, si ottiene la formula

$$f = 2 \frac{\alpha_u}{\beta_u^2 - \alpha_u^2} \frac{\tau_{cm}}{\tau_{cu}} \frac{\Delta_1}{\frac{2}{3} \Delta_1 \frac{l_{tu}}{L_u} \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma} - \Delta_2},$$

dove

$l_{tu}$  = libero cammino medio totale dei neutroni entro l'Uranio,

$$\gamma = \frac{1 - \frac{2}{3} \frac{l_{tu}}{L_u} \frac{I_1(\alpha_u)}{I_0(\alpha_u)}}{1 + \frac{2}{3} \frac{l_{tu}}{L_u} \frac{I_1(\alpha_u)}{I_0(\alpha_u)}}.$$



S. FRANCHETTI e M. GIOVANNOZZI: **Sparpagliamenti angolari degli sciame sotto materiale pesante**, 8, 312 (1951).

ERRATUM: *The first sentence of the summary should read:*

The authors try to extend (at least in some particularly simple conditions) the theory of angular spreading of showers to cover the case of showers generated in heavy material.

## LIBRI RICEVUTI E RECENSIONI

H. W. LEVERENTZ - *An Introduction to Luminescence of Solids*. J. Wiley and Sons, Inc., New York, 1950. Doll. 12.00, XVI+569 pagg.

Chi per la prima volta si accosta a quel vastissimo campo, che va sotto il nome generico di fluorescenza, trae dallo sterminato numero di lavori e di pubblicazioni esistenti, dispersi in più di un migliaio di riviste di tutti i paesi del mondo, un vivo senso di sgomento. Se poi limita all'estremo l'argomento della sua ricerca e riesce ad orientarsi tra molte decine di Autori che spesso s'ignorano a vicenda e qualche centinaio di lavori che molto spesso si contraddicono, si accorge di due fatti fondamentali.

In primo luogo, di gran lunga la maggior parte dei risultati sperimentali è completamente inutilizzabile dal punto di vista scientifico, perchè esperienze e misure sono state condotte sotto l'assillo di esigenze pratiche, in condizioni non ben definite, senza una chiara direttrice teorica, che permettesse di formulare in anticipo delle questioni precise.

In secondo luogo, manca quasi del tutto (eccezion fatta per i gas) una descrizione sufficientemente generale ed approfondita dei processi fisici fondamentali che stanno alla base dei fenomeni estremamente complessi che in ogni lavoro si cerca di chiarire e di studiare.

Così stando le cose, ogni tentativo di

organizzare l'immensa mole di materiale esistente, con intendimenti anche solo superficialmente critici, non può non essere il benvenuto.

Quello del LEVERENTZ è indubbiamente uno dei meglio riusciti tra i non pochi apparsi dopo la guerra. Dopo due capitoli d'introduzione generica alla fisica delle molecole e dei cristalli, tratta nel terzo capitolo della sintesi e del difficile problema della *completa* individuazione dei fosfori mediante simboli, per passare poi nel quarto capitolo a trattare in generale della costituzione, struttura e livelli energetici dei cristalli luminescenti.

Il quinto capitolo, che con le sue 227 pagine occupa da solo quasi la metà del volume, riguarda la luminescenza dei fosfori. I processi di assorbimento, trasformazione, immagazzinamento e riemissione sono singolarmente esaminati in qualche dettaglio. Si trattano poi i vari tipi di decadimento della fluorescenza in funzione del tempo e degli effetti su tale decadimento della temperatura del cristallo. Infine, un'ampia trattazione è dedicata ad argomenti importanti come la stimolazione e l'interdizione della fluorescenza e si passa in rassegna l'influenza di un gran numero di fattori sul rendimento in luce dei vari fosfori.

Chiudono il libro due interessanti capitoli sulle proprietà generali dei fosfori e sugli impieghi ed applicazioni tecniche di essi.

Il volume è in generale chiaro e coi

suoi numerosissimi esempi, la sua ricca bibliografia e i suoi indici, costituisce un molto utile strumento per chi desidera un avviamento su di un argomento particolare. V'è un lodevole tentativo di fissare una terminologia appropriata, semplice e non ambigua, d'indurre il lettore ad un ragionevole atteggiamento di vigile critica nei riguardi del materiale sperimentale.

Non manca tuttavia qualche aspetto negativo. Quasi completamente inutili nella loro forma ultraelementare (che incomincia col definire il numero atomico e gli isotopi e col chiarire per mezzo di tabelle le differenze tra fotoni, elettroni e nucleoni) i due capitoli introduttivi. Viceversa, non sufficiente, e non ben distinta dalla descrizione di fosfori particolari, la trattazione dei processi fisici fondamentali interessanti la fluorescenza. Si sarebbe desiderata per questi una esposizione sistematica più ampia e più chiara e non solo qualitativa, almeno là dove è possibile farla.

In altre parole, si sarebbe desiderato che questo libro si distinguesse dai precedenti per aver più il carattere di « Introduzione » allo studio della fluorescenza dei solidi e meno quello di repertorio di tutti i possibili fosfori fino ad oggi studiati.

Questa è forse la menda più grave del volume, che, completato in tal modo, avrebbe potuto facilmente avviare un certo numero di giovani a questo vasto campo di ricerca, ancora ben lontano da una sistemazione definitiva.

M. AGENO

« *Vacuum* » a *Review of Developements in Vacuum Research and Engineering*, Published by W. Edwards and Co. (London), Ltd., Worsley Bridge Road, Lower Sydenham, London, S. E. 26, England.

Non v'è periodico nuovo o libro appena uscito dai torchi, di cui non si dica da qualcuno che colma una lacuna. Tuttavia, non si può fare a meno di ripetere questa frase ormai fatta per la nuova rivista di EDWARDS (direttore H. L. J. BURGESS), che è veramente l'unica (a nostra conoscenza) che sia dedicata esclusivamente alla tecnica del vuoto.

Il nome dell'Editore potrebbe far pensare che si tratti di un periodico pubblicitario della grande Casa inglese. Si tratta invece di una rivista ad indirizzo scientifico-tecnico, aperta alla collaborazione di tutti e che si propone di portare a conoscenza di ricercatori e ingegneri ogni progresso venga fatto in materia di vuoto in ogni parte del mondo.

V'è inoltre da porre in rilievo una caratteristica, che contribuirà molto a rendere il nuovo periodico utile ad un gran numero di persone: si tratta di un ricchissimo estrattario classificato e stampato in modo tale da permettere la raccolta e l'ordinamento indipendente degli estratti. Nel primo numero, che abbiamo sott'occhio, sono recensiti ben 93 lavori, con 40 rinvii.

Riteniamo quindi che la nostra segnalazione sarà ben accolta da tutti coloro che s'occupano di vuoto e concludiamo col tradizionale augurio di lunga vita e buona fortuna.

M. AGENO



## Concorsi a Premi e Borse di studio per il 1951

Grazie alle sovvenzioni che alcuni enti e privati hanno dato alla Società con lo scopo di organizzare concorsi a borse di studio e a premi fra i giovani cultori italiani della Fisica, il Consiglio della Società, mentre a nome di questa esprime il suo compiacimento e la sua lode per l'iniziativa e la sua gratitudine per essere stata prescelta allo scopo indicato, bandisce, d'intesa con i sovvenzionatori, i seguenti concorsi per un totale di lire 1100 000 (un milione e centomila).

- Premio di lire 300 000 (trecentomila) indivisibili, intitolato « Premio Città di Como, 1951 », istituito dall'Amministrazione Comunale di quella città.
- Borsa di lire 250 000 (duecentocinquantamila) indivisibili, intitolata « Borsa per studi di Ultracustica » (residuata del precedente concorso per l'Ultracustica), istituita dal Ministero della Pubblica Istruzione e destinata a studi di Ultracustica;
- Borsa di lire 200 000 (duecentomila) indivisibili, intitolata « Borsa Università di Trieste per studi di Fisica », istituita da quella Università;
- Premio di lire 150 000 (centocinquantamila) indivisibili, intitolato « Premio Augusto Righi, 1951 », istituito dall'Unione degli Industriali della Provincia di Bologna;
- Premio di lire 100 000 (centomila) indivisibili, intitolato « Premio Augusto Righi, 1951 », istituito dal Comitato Onoranze ad Augusto Righi.
- Premio di lire 100 000 (centomila) indivisibili, intitolato « Premio Giorgio Cini », istituito dal Senatore Conte Vittorio Cini.

Le modalità di detti concorsi sono fissate dalle seguenti norme.

1. — Ai concorsi sopra elencati sono ammessi i soci individuali della Società Italiana di Fisica, di nazionalità italiana, che abbiano versato entro il mese di Luglio 1951 la quota sociale per il 1951 e non siano nè membri del Consiglio della Società, nè Vicedirettori del giornale *Il Nuovo Cimento*, nè professori di ruolo di Università.
2. — I concorrenti possono presentarsi o singolarmente per proprio conto oppure in gruppo per squadre che abbiano compiuto lavori in collaborazione.
3. — Le domande di ammissione ai concorsi (redatte su carta libera e recanti le generalità e la residenza dei singoli concorrenti) dovranno pervenire alla Presidenza della Società Italiana di Fisica (Milano, Via Saldini, 50), non più tardi delle ore 12 di lunedì 3 Settembre 1951.

Una medesima domanda può servire per partecipare a uno o a più concorsi: in essa il concorrente isolato o il gruppo di concorrenti deve indicare a quali concorsi intende partecipare; inoltre ogni gruppo dovrà indicare a chi, delle persone formanti il gruppo stesso, dovrà essere consegnata, nel caso che questo risulti vincente, le somme costituenti il premio o la borsa, intendendosi, in questo secondo caso, che il concorrente designato sarà quegli che dovrà beneficiare della borsa stessa.

4. — Ogni concorrente isolato e ogni gruppo di concorrenti deve inoltre unire alla domanda quei titoli, documenti, pubblicazioni (questi in triplice copia, salvo che siano inserite nel *Nuovo Cimento*, nel qual caso basterà darne l'esatta indi-

cazione bibliografica), lavori inediti (in triplice copia dattilografata) che ritenga utile per comprovare l'attività svolta rispettivamente dal concorrente stesso o dal gruppo nel quadriennio 1° Settembre 1947-31 Agosto 1951 nel campo della Fisica, questo essendo ristretto, per il Concorso alla « Borsa per studi di Ultracustica » alla sola Ultracustica.

5. — Inoltre ogni singolo concorrente deve unire alla domanda propria o del gruppo cui appartiene, una dichiarazione firmata dalla quale risulti quali borse e premi gli siano stati conferiti nel quadriennio 1° Settembre 1947-31 Agosto 1951; detta dichiarazione deve essere fatta anche se negativa.
6. — Nel caso di concorsi a borse, il concorrente isolato, e, per ogni gruppo, quello designato dal gruppo stesso come beneficiario della borsa (art. 3) dovrà unire alla domanda propria o del rispettivo gruppo:
  - a) una dichiarazione (firmata) degli studi che, usufruendo della borsa, intende svolgere;
  - b) l'indicazione dell'istituto presso cui intende recarsi a tal fine;
  - c) la dichiarazione (firmata) di assumere l'impegno morale che egli, se risulterà vincitore, usufruirà della borsa allo scopo per cui è stata richiesta e con le modalità indicate nel seguente articolo.
7. — Sempre nel caso di concorso a borse, ciascuno di coloro che usufruirà di queste dovrà, salvo casi di stretta forza maggiore, iniziare, entro sei mesi dalla proclamazione dei vincitori, gli studi per cui la borsa è stata richiesta, recandosi presso l'istituto stabilito e dandone notizia alla Presidenza della Società. L'attività di studio presso detto Istituto è di almeno novanta giorni consecutivi per istituti esteri e di centocinquanta giorni consecutivi per istituti italiani. Entro un mese dal compimento degli studi presso l'istituto cui si è recato, ciascuno dei beneficiari della borsa dovrà trasmettere alla presidenza della Società una relazione sull'attività svolta.
8. — La Commissione giudicatrice dei concorsi sopra elencati è costituita dal Consiglio di presidenza della Società e dai due Vicedirettori del giornale *Il Nuovo Cimento*.
9. — I premi e le borse in questione saranno assegnati a quei concorrenti o gruppi di concorrenti che a giudizio della Commissione sono i più meritevoli.
10. — Il giudizio della Commissione è inappellabile.
11. — Le borse e i premi non sono cumulabili nè tra loro nè le une con gli altri.
12. — I vincitori verranno proclamati nel prossimo Congresso della Società (Trieste, Autunno 1951) e le borse e i premi in questione verranno nella medesima occasione conferiti da coloro stessi che hanno fornito le somme o da loro rappresentanti.

Milano, 31 Maggio 1951.

Il Segretario: G. C. DALLA NOCE

Il Presidente: G. POLVANI

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

Direttore responsabile: G. POLVANI

Tipografia Compositori - Bologna

Questo fascicolo è stato licenziato dai torchi il 23-V-1951